Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 5 декабря 2004 года
11 класс

Сюжет 1

В этом сюжете f и g — функции, определённые на положительных числах, значения которых положительны.

1. Существуют ли такие функции $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$, что $f(g(x)) > g(f(x)) > f(x) > g(x) > 0$ при любом положительном x?
2. Докажите, что не существует таких непрерывных функций f и g, что $f(g(x)) > g(x) > f(x) > g(f(x)) > 0$ при любом положительном x.
3. Приведите пример таких непрерывных функций f и g, что $f(g(x)) > f(x) > g(x) > g(f(x)) > 0$ при любом положительном x.
4. Докажите, что не существует таких непрерывных функций f и g, что $f(g(x)) > f(x) > g(f(x)) > g(x) > 0$ при любом положительном x.

Сюжет 2

Во всех пунктах этого сюжета a и n обозначают натуральные числа.

1. На доске написаны числа от 1 до $2n$ кроме некоторого числа a. Разрешается одновременно стирать два числа так, чтобы их сумма равнялась a или $2n + a + 1$. Приведите все возможные варианты наборов чисел, которые могли остаться, когда уже нельзя стереть такую пару чисел?
2. Пусть n такое, что число $2n + 1$ — простое. Числа от 1 до $2n$ разбиты на два набора. Докажите, что можно в каждом наборе выбрать не более одного числа и переместить в другой набор так, чтобы в любом наборе сумма чисел делилась на $2n + 1$.
3. Докажите утверждение второго пункта для произвольного n.
4. Разбейте числа от 1 до $2n + 1$ при некотором n большем 5 на 5 кучек так, чтобы, выбрав в каждой кучке не более одного числа, а также кучку, куда его переложить, никак не удалось бы достичь того, чтобы сумма в каждой кучке делилась на $2n + 1$. Не забудьте обосновать правильность примера.

Сюжет 3

Напомним, что подобием фигуры с коэффициентом $k > 0$ называется такое её преобразование, при котором любым двум точкам X и Y фигуры сопоставляются такие точки X' и Y', что $X'Y' = k \cdot XY$. Фигура Φ' называется подобной фигуре Φ с коэффициентом k, если существует подобие с коэффициентом k, переводящее Φ в Φ'.

1. Прямоугольный треугольник $A'B'C'$ вписан в подобный ему треугольник ABC, названия вершин соответственны, при этом вершина A' лежит на BC, B' на AC, а C' на AB. Найдите все возможные значения коэффициента подобия.
2. Треугольник $A'B'C'$ вписан в треугольник ABC, подобный ему с коэффициентом $k < 1$; названия вершин соответственны. При этом вершина A' лежит на BC, B' на AC, C' на AB, $\angle BC'A' = \theta$, $\angle CAB = \alpha$. Докажите, что $k \cos \frac{\alpha - \theta}{2} = \frac{1}{2}$.
3. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, а тетраэдр с вершинами в основаниях высот подобен исходному. Докажите, что исходный тетраэдр — правильный.
4. Тетраэдр с вершинами в основаниях высот, опущенных из вершин исходного тетраэдра, оказался соответственно подобным исходному. Докажите, что квадрат коэффициента подобия равен $1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$, где α — двугранный угол при некотором ребре, а β — угол между этим ребром и противоположным, как между скрещивающимися прямыми.

Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 5 декабря 2004 года
7 класс

1. У Лёши были записаны в тетрадь числа от 1 до 10. Лёша решил зачёркивать числа по два, записывая вместо них их разность (возможно отрицательную), до тех пор, пока у него не останется одно число — Результат. На какой наибольший Результат может рассчитывать Лёша?
2. У Ксюши есть 5 монет и 4 весов. Она знает, что одна из монет на грамм легче остальных, а у одних весов одна чаша на грамм легче другой (остальные весы исправны). Как за пять взвешиваний Ксюше определить и лёгкую монету, и неисправные весы?
3. На клетках $a2$, $a7$, $e4$, $f6$ шахматной доски стоят короли. Помогите Лене распилить доску на 4 равные части так, чтобы все короли попали в одну часть.
4. Всех мальчиков, пришедших на дискотеку, звали Паша или Витя, а девочек — Маша или Полина. Известно, что все станцевали ровно по 4 танца, и при этом все Паши танцевали два раза с Машами и два раза — с Полинами; один из Вить танцевал также два раза с Машами и два раза — с Полинами. А все Полины танцевали три раза с Пашей и один раз — с Витей. Докажите, что на дискотеке было хотя бы две Маши.

Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 5 декабря 2004 года
7 класс — выводная аудитория

5. Каждый вечер Надя выполняет домашнее задание по математике, причём на каждую следующую задачу она тратит вдвое больше времени, чем на предыдущую, так как утомляется. Могло ли так случиться, что на какие-то две сложные задачи в сумме было потрачено в 10 раз больше времени, чем на какие-то две простые?
6. Оля вы́резала из тетрадного листа клетчатый квадрат 25×25 клеточек. Серёжа закрасил в нём несколько строчек, Толя — несколько столбцов, а Дима посчитал, сколькими способами можно вы́резать квадратик 2×2 так, чтобы хотя бы одна его клеточка оказалась окрашенной, и получил число 333. Докажите, что Дима ошибся.
7. У Коли есть карточки с номерами от 1 до 800. Коля показывает Никите пару карточек с номерами, отличающимися на 1, после чего Никита забирает себе одну из этих карточек. Так происходит до тех пор, пока у Коли есть хотя бы одна такая пара карточек. Какое наибольшее количество карточек Никита заведомо может положить к себе в рюкзак, не взирая на Колины трюки?

Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 5 декабря 2004 года
8 класс

Сюжет 1

1. Круг разбит на 100 секторов, в трёх из которых стоят фишки. За ход можно сдвигать фишку в соседний сектор. За сколько ходов можно сделать три фишки вершинами равнобедренного треугольника?
2. Круг разбит на 50 равных секторов, каждый из которых закрашен в один из двух цветов. Петя хочет перекрасить несколько секторов так, чтобы новая картинка не менялась при повороте (вокруг центра круга) на 72°. Сколько секторов ему нужно для этого перекрасить?
3. Круг разбит на 25 равных секторов, 13 из которых закрашены в один из двух цветов. Петя хочет перекрасить несколько секторов так, чтобы новая картинка не менялась при симметричном отражении относительно какой-нибудь прямой. Докажите, что ему хватит пяти перекрашиваний.
4. Круг разбит на $4n$ равных секторов, каждый из которых закрашен в один из двух цветов. Петя хочет перекрасить несколько секторов, так, чтобы новая картинка менялась на противоположную при симметричном отражении относительно какой-нибудь прямой. Докажите, что ему хватит n перекрашиваний.

Сюжет 1

Катя написала на карточках 100 чисел и перевернула карточки. Стёпа может показывать на пару карточек и узнавать их сумму.

1. За сколько ходов можно узнать хотя бы одно число?
2. Если известно, что написаны числа 1, 2, ... , 100, но Катя каждый раз ошибается на 1, сколько раз Стёпе потребуется задать вопросы, чтобы уличить её в обмане?
3. Покажите, что если Стёпа будет как попало задавать вопросы, то может случиться так, что и после 2500 Степиных вопросов, никто (не знающий чисел, но слышавший ответы) не сможет определить ни одного числа.
4. За сколько вопросов можно заведомо отгадать все числа?

Сюжет 1

1. Имеется клетчатая доска 8×8. Маша и Полина играют в игру. За ход Полина помечает какую-то клеточку на доске, а Маша в ответ вырезает какую-то из клеточек (по своему выбору), граничащую по стороне с выбранной. Помечать уже помеченную клетку запрещено. При этом Маша стремится сохранить в целости остаток доски, а Полина стремится заставить Машу разрезать доску на части. Чья возьмёт?
2. Иван и таракан по очереди вырезают клетки из доски 3×1033. Первым ходит Иван. Тот, после чьего хода остаток доски распдется на части, победил. Кто выиграет, Иван или таракан?
3. Решите предыдущую задачу для доски 1033×1034.
4. Имеется клетчатая доска 8×8. Маша и Полина играют в игру. За ход Полина помечает какую-то клеточку на доске, а Маша в ответ вырезает либо эту клеточку, либо какую-то из клеточек (по своему выбору), граничащую с ней по стороне. Помечать уже помеченную клетку запрещено. При этом Маша стремится сохранить в целости остаток доски, а Полина стремится заставить Машу разрезать доску на части. Чья возьмёт?

Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 5 декабря 2004 года
9–10 классы.

Сюжет 1

Назовём окружность, проходящую через середины сторон треугольника, срединной окружностью этого треугольника.

1. Докажите, что срединная окружность треугольника касается описанной около него окружности тогда и только тогда, когда треугольник является прямоугольным.
2. Даны две окружности с отношением радиусов 1 : 2, причём одна строго внутри другой. Докажите, что для любой точки на большей окружности существует ровно один треугольник, у которого данная точка будет одной из вершин: бóльшая окружность — описанной, а мéньшая — срединной.
3. Даны две пересекающиеся окружности с отношением радиусов 1 : 2. Постройте ГМТ, являющихся одной из вершин некоторого треугольника, для которого бóльшая окружность служит описанной, а мéньшая — срединной.
4. Радиус описанной около треугольника окружности равен 1, расстояние между центрами описанной и срединной равно $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, один из углов равен $150°$. Найти площадь треугольника.

Сюжет 1

1. Существуют ли два приведенных квадратных трёхчлена так что сумма их модулей постоянна на промежутке $[0, 1]$ и только на нём?
2. Верно ли, что для любых двух пар чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2), где $x_1 \neq x_2$ найдётся функция вида $f(x) = |x - a| + b$ такая, что $f(x_1) = y_1)$,$f(x_2) = y_2$?
3. Учительница дала задание Саше придумать n чисел $a_1, \dots, a_n$ и ещё одно число b так, чтобы уравнение $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = b$ имело более двух решений. При каких n у Саши есть шансы?
4. Пусть A и B — суммы n выражений вида $|x^n + ax^{n-1} + b|$. При каких n неравенство $A > B$ может не иметь решений?

Сюжет 1

Катя написала на карточках 100 чисел и перевернула карточки. Стёпа может показывать на пару карточек и узнавать их сумму.

1. За сколько ходов можно узнать хотя бы одно число?
2. Покажите, что если Стёпа будет как попало задавать вопросы, то может случиться так, что и после 2500 Степиных вопросов, никто (не знающий чисел, но слышавший ответы) не сможет определить ни одного числа.
3. За сколько вопросов можно заведомо отгадать все числа?
4. Стёпа написал список из 200 вопросов, по которым заведомо можно определить какие-то 70 чисел. Докажите, что отличник Сережа может узнать то же самое, задав лишь сто из этих вопросов.