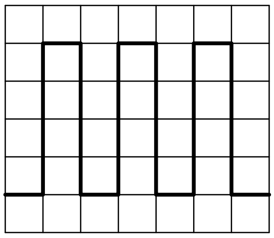
Разбор задач первого (заочного) тура
олимпиады Юношеской Математической Школы 2007г.
5–6 классы

1. Одно из возможных разрезаний:



2. Начнем решение с того, что покажем, что спортсмен, пришедший третьим, соврал. Предположим, он сказал правду. Мы знаем, что нельзя назвать число меньше одного. Значит, пришедший первым назвал число не меньше одного, пришедший вторым назвал число не меньше одного, а пришедший третьим сказал правду и назвал число 3. Значит, сумма их ответов не меньше чем $1 + 1 + 3 = 5$ и не может равняться 4. Противоречие.

Значит, третий спортсмен соврал. Тогда первые двое сказали правду и назвали числа 1 и 2 соответственно. Значит, третий спортсмен назвал число $4 - 1 - 2 = 1$.

Ответ: первый назвал число 1, второй – 2, третий соврал и назвал 1.

3. Обозначим за C кол-во воздушных шариков у Саши, через M – у Маши. Из условия видно, что $C + \frac{M}{2} < 45$, $C + 2 \cdot \frac{M}{3} > 45$. Значит, $\frac{M}{2} > 5$, а $\frac{M}{3} < 5$. Отсюда $M > 10$, и $M < 15$.

Теперь заметим, что если Маша может отдать половину своих шариков, то количество ее шариков нацело делится на два. Аналогично, если она может отдать $\frac{2}{3}$ своих шариков, оставив себе только треть, количество ее шариков делится нацело и на три. Но от 10 до 15 только одно число нацело делится и на 2, и на 3 – это 12.

Проверим, может ли у Маши быть 12 воздушных шариков, а у Саши, соответственно 38:

$$38 + 6 \leq 44, 38 + 8 \geq 46.$$

Проверка удалась. Значит, у Маши 12 воздушных шариков.

Ответ: у Маши 12 воздушных шариков.

4. Начнем с того, что через неделю положение лягушки изменилось. Предположим противное: через неделю лягушка осталась на том же месте. Тогда она сделала одинаковое количество прыжков "влево" и "вправо" от Костромы. Но это невозможно, так как в неделе 7 дней, а 7 не делится на 2.

Значит, за первую неделю лягушка сделала "шаг" по крайней мере на 50 км в одну сторону. Во вторую неделю, повторив все действия первой, она сделала тот же "шаг" и т.д. Таким образом, за первые 4 недели лягушка сделала по крайней мере 4 "шага" и отошла от Костромы не менее чем на 200 км. До конца месяца у нее осталось не больше трех дней, а значит она сможет пройти не более 150 км. и не вернется в Кострому.

5. Ответ:

2	6	3
1	24	12
16	8	4

6. Занумеруем места, на которых стоят исходные числа, римскими цифрами:

I	II	III	IV	V	VI	VII	$VIII$	IX
1	2	3	4	2	1	1	3	

Обозначим за x число, стоящее на месте $VIII$. Тогда на месте VII стоит одно из двух чисел:
а) $(x - 1)$,
б) $(x + 1)$.

Разберем сначала случай (а):

На VI месте может стоять либо $(x - 1) + 1 = x$, либо $(x - 1) - 1 = x - 2$. Так как x уже занято, там $(x - 2)$. Аналогично, на V месте может стоять $(x - 4)$ или x, но x занято и там, соответственно, $(x - 4)$. С помощью тех же рассуждений получаем, что на IV месте стоит $(x - 8)$.

Посмотрим на место III. Там может стоять $(x - 11)$ или $(x - 5)$. Но x максимум девятка, а значит $(x - 11)$ меньше 1 и не может стоять на месте III. Значит, на месте III стоит $(x - 5)$.

Теперь посмотрим на место II, на котором могут стоять $(x-3)$ или $(x-7)$. Если там $(x-3)$, то на месте I — либо $(x-2)$, либо $(x-4)$, а оба этих числа уже заняты, и мы приходим к противоречию. Значит, на месте II стоит $(x-7)$. На месте I тогда либо $(x-8)$, которое занято, либо $(x-6)$. Таким образом, на месте I может стоять только $(x - 6)$.

Далее посмотрим на место IX. Там может стоять либо $(x+3)$, либо $(x-3)$. Если там $(x+3)$, то $(x+3)-(x-8)=11$, но максимальная разность между числами от 1 до 9 это 8. Значит, на месте IX стоит $(x-3)$.

Мы установили, что в случае (а) x – это максимальное число. Значит, $x=9$. Осталось восстановить остальные числа и убедиться в том, что результат удовлетворяет условию задачи.

$$3 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 6$$

Здесь все числа от 1 до 9, и их разности такие, как требует условия. Значит, мы получили один из ответов.

Разберем случай (б). Заметим, что если везде заменить $-$ на $+$ и наоборот, то ход рассуждений не изменится, и мы получим единственный ответ:

$$(x+6) \quad (x+7) \quad (x+5) \quad (x+8) \quad (x+4) \quad (x+2) \quad (x+1) \quad x \quad (x+3)$$

Тогда x – минимальное число, и x это 1, а ответ принимает такой вид

$$7 \quad 8 \quad 6 \quad 9 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 4$$

Ответ. Возможны только два таких варианта:

$$3 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 6$$

$$7 \quad 8 \quad 6 \quad 9 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 4$$

7. Сначала заметим, что в сумме было получено и подарено поровну подарков. Таким образом, второклассники и третьеклассники подарили больше, чем получили ровно на столько же, на сколько первоклассники получили больше чем подарили.

Посмотрим, насколько больше получили первоклассники относительно того, сколько они подарили. Каждый пятиклассник получил на 5 подарков больше, а значит все первоклассники – на количество первоклассников, умноженное на 5 больше. Аналогично, второклассники подарили больше чем получили на количество второклассников, а третьеклассники - на удвоенное количество третьеклассников и это равно количеству второклассников, умноженному на 4, ведь 3–его класса в 2 раза больше чем второго. Получается, что в сумме второклассники и третьеклассники подарили подарков больше чем получили на количество второклассников, умноженное на 5. Мы уже выяснили, что второклассники и третьеклассники подарили больше, чем получили ровно на столько же, на сколько первоклассники получили больше чем подарили. Но тогда количество первоклассников, умноженное на 5 равно количеству второклассников, умноженному на 5, а значит первого и второго класса поровну. Таким образом, количество третьеклассников равно удвоенному количеству второклассников, и количество детей в первых трех классах равно удвоенному количеству третьеклассников и равно 80. Значит, третьеклассников 40 человек.

Ответ: в школе 40 третьеклассников.