**Олимпиада**
**Юношеской математической школы**
**II тур, 17 декабря 2017 года**
**10 класс. Основная аудитория**

### Сюжет 1

Во всех пунктах под $f(x), g(x), h(x)$ подразумеваются многочлены с вещественными коэффициентами.

**1.1.** Пусть $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = -x^2 + x + 1$. Найдите такой непостоянный многочлен $h$, что $h(f(x)) = h(g(x))$.

**1.2.** Докажите, что не существует квадратных трёхчленов $f$ и $g$, таких что $f(g(x)) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$.

### Сюжет 2

Окружность $\omega$ с центром в точке $I$ вписана в треугольник $ABC$ и касается его сторон $AB$ и $AC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Биссектрисы треугольника $ADE$ пересекаются в точке $J$. Отрезки $BJ$ и $CJ$ пересекают отрезок $DE$ в точках $P$ и $Q$ соответственно.

**2.1.** Докажите, что $PJ > PD$.

**2.2.** Известно, что $IJ = DE$. Найдите угол $BAC$.

### Сюжет 3

Есть две полоски длиной $k$. В первой самой левой клетке каждой из полосок стоит $n$ фишек. Двое играют в следующую игру: Паша своим ходом сдвигает произвольное множество фишек на одну клетку вправо, а Рома снимает с поля все только что сдвинутые фишки из какой-то из полосок по своему выбору. Первым ходит Паша.

**3.1.** Пусть $k = 4$, $n = 3$. Всегда ли Паша может добиться того, чтобы одна из фишек дошла до последней клетки?

**3.2.** Пусть $k = 4$, $n = 100$ и Паша каждым ходом сдвигает фишки в полоске только из каких-то двух клеток (по одной в каждой полоске). Докажите, что Рома может добиться того, что не более 50 фишек (с учетом снятых) попадут в последние клетки своих полосок.

**Олимпиада**
**Юношеской математической школы**
**II тур, 17 декабря 2017 года**
**10 класс. Выводная аудитория**

### Сюжет 1

Во всех пунктах под $f(x), g(x), h(x)$ подразумеваются многочлены с вещественными коэффициентами.

**1.3.** Пусть $h$ — непостоянный многочлен, $f \neq g$, и пусть $h(f(x)) = h(g(x))$. Докажите, что $f + g$ — постоянный многочлен.

**1.4.** Пусть непостоянные различные многочлены $f$ и $g$ с положительными старшими коэффициентами таковы, что

$$f(f(x)g(x)) + f(g(x)) \cdot g(f(x)) + f(f(x)) \cdot g(g(x)) = \\ = g(f(x)g(x)) + f(f(x)) \cdot f(g(x)) + g(f(x)) \cdot g(g(x)).$$

Докажите, что $f$ и $g$ отличаются только одним коэффициентом.

### Сюжет 2

Окружность $\omega$ с центром в точке $I$ вписана в треугольник $ABC$ и касается его сторон $AB$ и $AC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Биссектрисы треугольника $ADE$ пересекаются в точке $J$. Отрезки $BJ$ и $CJ$ пересекают отрезок $DE$ в точках $P$ и $Q$ соответственно.

**2.3.** Докажите, что периметр треугольника $BJC$ больше периметра четырехугольника $BDEC$.

**2.4.** Пусть $M$ и $N$ — середины $DJ$ и $JE$. Докажите, что $PM = QN$.

### Сюжет 3

Есть две полоски длиной $k$. В первой самой левой клетке каждой из полосок стоит $n$ фишек. Двое играют в следующую игру: Паша своим ходом сдвигает произвольное множество фишек на одну клетку вправо, а Рома снимает с поля все только что сдвинутые фишки из какой-то из полосок по своему выбору.

**3.3.** Пусть $n < 2^{k-3}$. Докажите, что Рома может сделать так, что ни одна из фишек не дойдёт до конца.

**3.4.** Пусть $n > k \cdot 2^k$. Докажите, что Паша может сделать так, что хотя бы одна из фишек дойдёт до конца.