Решения задач заочного тура олимпиады ЮМШ 2010 года.
5 класс

1. С момента, когда часы выставили правильно, и до шести часов вечера в четверг прошло 3 дня и 18 часов. 1 ч 52 мин равняется 112 минутам. Значит, каждые сутки часы уходят вперёд на $\frac{112}{7} = 16$ минут, а поскольку в одних сутках – 24 часа, то за каждые 6 часов они уходят вперёд на $\frac{16 \cdot 6}{24} = 4$ мин. Таким образом, за 3 дня и 18 часов (т.е за $3 \cdot 4 + 3 = 15$ раз по 6 часов) часы уйдут вперёд на $4 \cdot 15 = 60$ мин, т.е., на час, Значит время, которое покажут часы в четверг в 18-00 — 19-00, 7 часов вечера.

2. Заметим, что все гномы, кроме самого младшего, соврали (так как у каждого из остальных есть младший его гном, и этот гном говорит ему правду). Значит, справа от каждого гнома, кроме самого младшего,сидит младший его гном. Следовательно обходя стол по кругу, начав с самого младшего и переходя от каждого гнома к его левому соседу, мы будем встречать всё более и более старших гномов – до тех пор, пока не вернёмся к самому младшему. Итак, гномы сидят в порядке увеличения возраста, при обходе по часовой стрелке вокруг стола, начиная с самого младшего.

3. Так как Жигули и Москвич движутся с равными скоростями в одну сторону, то расстояние между ними всё время одно и то же; назовём это расстояние **суперкилометром (скм)**. Поэтому расстояние между Жигулями и БМВ в 11-00 (1 скм) равно расстоянию между Жигулями и Мерседесом в 13-00 (1 скм). Из условия следует, что Жигули и БМВ в сумме преодолели расстояние 1скм за три часа (с 11-00 до встречи в 14-00). Поскольку у Мерседеса скорость такая же, как и у БМВ, то и Жигули в сумме с Мерседесом так же преодолеют один суперкилометр за три часа, считая с 13-00, и встретятся в 16-00.

4. Пронумеруем точки в порядке их следования по кругу — 1-я, 2-я, 3-я,... 10-я. После этого соединим их отрезками “через 3” — 1-ю с 5-ой, 2-ю с 6-ой, 3-ю с 7-ой,...., 9-ю со 2-ой, 10-ю с 3-й. Получившиеся 10 отрезков как раз удовлетворяют нужному свойству.

5. Заметим, что А не может быть больше 6 (от 7 и более нельзя отсчитать четыре последовательных цифры). С другой стороны, если $A < 5$, то первое слагаемое меньше 5000, а $D < 8$, значит остальные два слагаемых меньше 8000. Но тогда вся сумма меньше, чем 5000+8000+8000<21300, и это не даёт нам решения ребуса.

   При $A = 6$ получаем $6789 + 9876 + * * ** = 21300$, откуда $* * ** = 4635$ – число записанное другими цифрами. Не подходит. При $A = 6$ получаем $5678 + 8765 + * * ** = 21300$, откуда $* * ** = 6857$ – подходит. Значит, единственный ответ в ребусе — это $A = 5 B = 6 C = 7 D = 8$ и $* * ** = BDAC = 6857$.

6. Предположим, что среди получившихся прямоугольников нет ни одного квадрата. Тогда у любого из этих прямоугольников длины всех сторон не меньше 2 (по условию задачи), причём имеется сторона длины больше 2 – иначе это был бы квадрат 2×2. Значит, каждый прямоугольник состоит не менее, чем из $2 \times 3 = 6$ клеточек. Поэтому все 11 прямоугольников занимают не менее чем $6 \times 11 = 66$ клеточек,чего не может быть, так как вся доска содержит только 64 клеточки и прямоугольники не перекрываются. Поэтому наше предположение неверно, и хотя бы один квадратик среди этих прямоугольников обязательно есть. (Мы доказали на самом деле,что есть хотя бы один квадратик 2×2).

7. Заметим, что если команда одержала столько же побед, сколько матчей она сыграла вничью, то за победы она получила ровно вдвое больше очков, чем за ничьи. А общее количество очков, набранных командой, втрое больше количества очков, полученных за ничьи. В частности, оно делится на три.

   Если же команда проиграла столько же матчей, сколько свела вничью, мы точно таким же рассуждением получаем, что количество "недобранных"ею очков делится на три (считая, что в проигранном матче команда не добирает двух очков, а в ничейном – одного). Поскольку каждая команда провела 15 матчей, то общее количество набранных и "недобранных"ею очков равно

30. Поэтому, если количество "недобранных"очков кратно трём, то и количество набранных – тоже.

Таким образом, мы показали, что у каждой команды, участвовавшей в турнире, количество очков делится на три. Значит, набравший больше всех очков "Зенит"оторвался от остальных как минимум на три очка. Поскольку за тур можно набрать максимум два очка, из этого следует, что и перед последним туром "Зенит"был впереди остальных (как минимум на одно очко).