Решения задач заочного тура олимпиады ЮМШ 2010 года.
8 класс

1. Найдите все натуральные числа n, для которых число $\frac{(2n+3)(n+1)-(n-3)(n+2)}{(2n+3)^2-3(n+1)(n+3)}$ является квадратом натурального числа.

   Решение.Давайте раскроем скобки и приведем подобные слагаемые: в числителе получится $(2n^2+5n+3)-(n^2-n-6) = n^2+6n+9$, а в знаменателе — $(4n^2+12n+9)-3(n^2+4n+3) = n^2$. Итак, у нас получилась дробь $\frac{(n+3)^2}{n^2} = (\frac{(n+3)}{n})^2$. Это число является квадратом натурального числа тогда и только тогда, когда $\frac{(n+3)}{n}$ — натуральное число. Заметим, что последнее верно, только если $n+3$ делится на n, то есть 3 делится на n. Так как у числа 3 только два натуральных делителя — 3 и n, то ответ — $\{3, n\}$.

2. Шахматную доску (8×8 клеток) разрезали по клеточкам на 11 прямоугольников. Оказалось, что длины сторон всех прямоугольников больше 1. Может ли среди этих прямоугольников не оказаться ни одного квадрата?

   Решение. Предположим, что среди прямогоугольников нет ни одного квадрата. Пусть один из прямоугольников — $a \times b$ клеток, где $a > b$. Тогда $b \geqslant 2$, поэтому $a \geqslant 3$, и $ab \geqslant 6$. Следовательно, площадь каждого прямоугольника не менее 6 клеток. Итак, все 11 прямоугольников должны занимать не менее 66 клеток, в то же время на нашей доске всего 64 клетки.

3. В выражении $(x^2-1)(9y^2-1)+5xy$ замените число 5 на какое-нибудь другое натуральное число так, чтобы это выражение раскладывалось на множители.

   Решение. Раскроем скобки и запишем наше выражение так: $(9x^2y^2+1)-(9y^2+x^2)+5xy$. Заметим, что первое слагаемое равно $(3xy+1)^2-6xy$, а второе — $-(3y-x)^2-6xy$. Таким образом, если заменить 5 на 12, то искомое выражение примет вид $(3xy+1)^2-(3y-x)^2 = (3xy+1-3y+x)(3xy+1+3y-x)$.

4. Найдите все двузначные натуральные числа, у которых цифра единиц равна количеству однозначных натуральных делителей, а цифра десятков — количеству двузначных натуральных делителей.

   Решение. Пусть наше число $x = \overline{ab}$, где $a \neq 0$. Если x делится на d, и $x = d \cdot d_1$, то оба числа d, d_1 не могут быть двузначными (иначе $x \geqslant 10 \cdot 10 = 100$). Следовательно, либо они оба — цифры, либо одно из них — цифра, а второе — двузначное число. Таким образом, у x количество делителей-цифр не менее количества двузначных делителей, следовательно, $a \leqslant b$. Кроме того, либо x — точный квадрат, либо числа a и b — одной четности.

   Отметим, что b не может равняться 5, 7 или 9: действительно, иначе наше число x нечетно, поэтому среди цифр его делителями могут быть только нечетные цифры $1, 3, 5, 7, 9$. В то же время x не может делиться на попарно взаимно простые числа $5, 7, 9$, так как иначе x делится на $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ и, следовательно, $x\ geqslant 315$.

   Аналогично доказывается, что $b \neq 8$: иначе x делится на хотя бы три из четырех попарно взаимно простых чисел $5, 7, 8, 9$ и, значит, x не менее $5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$.

   Выпишем теперь все двузначные числа, удовлетворяющие описанным выше условиям: это $11, 22, 13, 33, 24, 44, 26, 36, 46, 66$. Ясно, что среди них являются решениями задачи только $11, 22, 36$.

5. Коля нарисовал графики функций $y = |x-a|$ и $y = c-|x-b|$ (где a, b, c — положительные числа). Он заметил, что среди частей, на которые эти два графика и ось Ox разбили плоскость, оказались два треугольника и один четырехугольник. Докажите, что сумма площадей этих двух треугольников не меньше площади четырехугольника.

   Решение. Так как графики наших функций пересекают ось Ox под углом $45\circ$, то в каждом из двух рассматриваемых треугольников есть по два угла, равных $45\circ$. Поэтому эти треугольники – равнобедренные прямоугольные. Пусть x — катет первого из них, а y — катет второго, тогда сумма площадей искомых треугольников равна $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Рассмотрим четырехугольник: два его угла — смежные с прямыми углами треугольников, а ещё один угол четырехугольника дополнюет до развернутого угла два угла треугольников, равные 45○. Следовательно, в нашем четырехугольнике есть три прямых угла. Таким образом, он является прямоугольником и имее площадь xy.

Осталось доказать, что $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geqslant xy$, что равносильно неравенству $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Так как $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geqslant 0$, искомое неравенство верно.

6. В выпуклом пятиугольнике k диагоналей имеют длину меньше 1 см, а остальные $5 - k$ диагоналей – длину больше 2 см. Чему может равняться k? (Найдите все возможные значения k и докажите, что других нет).

   Решение. Нужно рассмотреть следующие случаи: $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ясно, что случаи $k = 0$ и $k = 5$ возможны (можно, например, нарисовать, соответственно, "очень большой"и "очень маленький"правильные 5-угольники. Пусть вершины пятиугольника (по часовой стрелке) — A, B, C, D, E. Докажем, что $k \neq 4$. Для этого предположим, что только одна диагональ (скажем, CE) больше 2см., а остальные четыре меньше 1см. Но тогда в силу неравенства треугольника $|CE| \leqslant |CO| + |OE| < |AC| + |BE| \leqslant 2$.

   Приведем теперь примеры для остальных значений k. Для $k = 1$: расположим вершины B, C, D в вершинах равностороннего треугольника со сторонами 0,5см, вершину A поместим на перпендикуляр к BD, проведенный из B по другую сторону от C, а вершину E — на перпендикуляр к BD, проведенный из D по другую сторону от C. Теперь, перемещая A и E по соответствующим перпендикулярам, мы можем сделать все диагонали (в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$) кроме BD больше 2см.

   Для $k = 2$: пусть вершины BDE лежат в вершинах равностороннего треугольника со сторонами 0,5см, проведем прямую DE и параллельную ей прямую через точку B. Расположим вершины A и C между этими прямыми: A — слева от треугольника BDE, а C — справа от BDE. Тогда диагонали BD и BE — меньше 1см, а, перемещая вершину A влево, а вершину C вправо, мы сможем сделать все остальные диагонали в $ABCDE$ больше 2см.

   Наконец, рассмотрим $k = 3$: пусть $BCDE$ — прямоугольник, все стороны и диагонали которого меньше 1см, а A располагается между прямыми BC и DE, причем A и CD лежат по разные стороны от BD. Тогда, удаляя вершину A от BE, мы сможем сделать диагонали AC и AD больше 2см, в тоже время остальные диагонали в $ABCDE$ будут меньше 1см.

7. Тридцать шесть команд сыграли однокруговой турнир за 35 дней (каждая команда сыграла с каждой, в день играя по матчу). За победу в матче давали 3 очка, а за ничью — одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих либо вдвое больше числа поражений, либо вдвое меньше числа побед. Больше всех очков набрал “Зенит”. Докажите, что и за два дня до конца у “Зенита” очков было больше, чем у любой другой команды.

   Решение. Докажем, что в итоге количество очков у каждой команды кратно 7. Пусть у некоторой команды — n поражений и $2n$ ничьих. Тогда у неё всего 35-3n выигрышей, поэтому она набрала $3(35 - 3n) + 4n = 105 - 7n$ очков. Если же у команды m ничьих и $2m$ выигрышей, то она набрала $6m + m = 7m$ очков. Следовательно, в конце турнира у “Зенита” — хотя бы на 7 очков больше, чем у любой другой команды. Теперь утверждение задачи непосредственно следует из того факта, что за один день разница между количеством набранных очков у двух команд может измениться максимум на три очка.

8. На окружности отметили 10 точек и провели несколько отрезков с концами в этих точках так, что любые два отрезка имеют общую точку. Найдите наибольшее возможное количество отрезков.

   Решение. Предположим сначала, что все 10 точек находятся на равных расстояниях друг от друга, то есть располагаются в вершинах правильного 10-угольника. Занумеруем точки числами от 1 до 10 и для каждого отрезка сосчитаем сумму номеров его концов. Любые два отрезка, у которых эти суммы имеют одинаковый остаток от деления на 10 (то есть последнюю цифру) будут параллельными и, следовательно, не имеющими общих точек. Итак, если проведены хотя бы 11 отрезков, то у некоторых двух отрезков суммы номеров их концов имеют равные последние цифры, поэтому отрезки не имеют общих точек. Чтобы построить 10 отрезков, удовлетворяющих условию, можно, к примеру, провести отрезки, соединяющие какую-то одну точку со всеми остальными, и ещё один отрезок, соединяющий ближайших соседей этой точки слева и справа.

Рассмотрим теперь общую ситуацию: если мы будем двигать некоторые точки по окружности (не меняя порядка их расположения), то пересекаться будут только те отрезки, что пересекались вначале. За несколько таких действий мы сделаем все расстояния между соседними точками равными. Таким образом, ответ для произвольного расположения точек на окружности — тоже 10 отрезков.