Олимпиада Юношеской математической школы

II тур. 4 декабря 2016 года

10 класс

Сюжет 1

1.1. Пусть I — центр вписанной окружности ω треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AIC пересекает ω в точках P и Q (так, что P и A по одну сторону от прямой BI, а Q и C — по другую). Докажите, что если $PQ||AC$, то треугольник ABC равнобедренный.

1.2. Дан треугольник DEF. Окружность, проходящая через вершины E и F пересекает стороны DE и DF в точках X и Y соответственно. Биссектриса угла $\angle DEY$ пересекает DF в точке Y', а биссектриса угла $\angle DFX$ пересекает DE в точке X'. Докажите, что $XY||X'Y'$.

Сюжет 2

P — простое число. Числа от 1 до $P(P-1)$ нужно расставить в клетки таблицы $P \times P-1$ (P строк и $P-1$ столбец) так, чтобы у каждого числа остаток от деления на P был таким же, как и у суммы соседних с ним по стороне чисел.

2.1. Пусть в первой строке стоят по порядку числа от 1 до $P-1$. Чему может быть равно P?

2.2. Пусть $P=7$, а каждое число во второй строке в три раза больше своего соседа из первой строки. Докажите, что числа в двух центральных клетках делятся на 7.

Сюжет 3

На столе лежит куча из n камней. За ход можно разбить любую из имеющихся куч на две меньших. При этом размеры любых двух куч, находящихся на столе одновременно, должны быть «похожими».

3.1. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более, чем в $\sqrt{2}$ раз. Докажите, что тогда никакую кучу нельзя разбить на три кучи.

3.2. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более, чем вдвое. Докажите, что тогда любую кучу можно разложить на кучи по одному камню.

Олимпиада Юношеской математической школы

II тур. 4 декабря 2016 года

10 класс

Сюжет 1

1.1. Пусть I — центр вписанной окружности ω треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AIC пересекает ω в точках P и Q (так, что P и A по одну сторону от прямой BI, а Q и C — по другую). Докажите, что если $PQ||AC$, то треугольник ABC равнобедренный.

1.2. Дан треугольник DEF. Окружность, проходящая через вершины E и F пересекает стороны DE и DF в точках X и Y соответственно. Биссектриса угла $\angle DEY$ пересекает DF в точке Y', а биссектриса угла $\angle DFX$ пересекает DE в точке X'. Докажите, что $XY||X'Y'$.

Сюжет 2

P — простое число. Числа от 1 до $P(P-1)$ нужно расставить в клетки таблицы $P \times P-1$ (P строк и $P-1$ столбец) так, чтобы у каждого числа остаток от деления на P был таким же, как и у суммы соседних с ним по стороне чисел.

2.1. Пусть в первой строке стоят по порядку числа от 1 до $P-1$. Чему может быть равно P?

2.2. Пусть $P=7$, а каждое число во второй строке в три раза больше своего соседа из первой строки. Докажите, что числа в двух центральных клетках делятся на 7.

Сюжет 3

На столе лежит куча из n камней. За ход можно разбить любую из имеющихся куч на две меньших. При этом размеры любых двух куч, находящихся на столе одновременно, должны быть «похожими».

3.1. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более, чем в $\sqrt{2}$ раз. Докажите, что тогда никакую кучу нельзя разбить на три кучи.

3.2. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более, чем вдвое. Докажите, что тогда любую кучу можно разложить на кучи по одному камню.

Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 4 декабря 2016 года
10 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1

Пусть I — центр вписанной окружности ω треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AIC пересекает ω в точках P и Q (так, что P и A по одну сторону от прямой BI, а Q и B — по другую).

1.3. Пусть M — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC (выбираем ту дугу, которая не содержит точку C), а N — середина дуги BC (выбираем ту дугу, которая не содержит точку A). Докажите, что $MN||PQ$.

1.4. Пусть T — точка пересечения прямых AP и CQ, а K — точка пересечения прямых MP и NQ. Докажите, что T, K и I лежат на одной прямой.

Сюжет 2

2.3. Пусть каждое число во второй строке в K раз больше своего соседа из первой строки. Докажите, что каждое число из этой таблицы, умноженное на K, дает такой же остаток при делении на P, как и сумма соседних с ним по столбцу чисел.

2.4. Докажите, что при $P = 23$ существует расстановка, удовлетворяющая условиям задачи.

Сюжет 3

3.3. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более, чем в k раз. Докажите, что для любого $k < 2$ найдётся число N_k такое, что никакую кучу нельзя разложить более, чем на N_k куч.

3.4. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются строго меньше, чем в 2 раза. На какое наибольшее количество куч можно разбить кучу из 660 камней?

Олимпиада Юношеской математической школы
II тур. 4 декабря 2016 года
10 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1

Пусть I — центр вписанной окружности ω треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AIC пересекает ω в точках P и Q (так, что P и A по одну сторону от прямой BI, а Q и B — по другую).

1.3. Пусть M — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC (выбираем ту дугу, которая не содержит точку C), а N — середина дуги BC (выбираем ту дугу, которая не содержит точку A). Докажите, что $MN||PQ$.

1.4. Пусть T — точка пересечения прямых AP и CQ, а K — точка пересечения прямых MP и NQ. Докажите, что T, K и I лежат на одной прямой.

Сюжет 2

2.3. Пусть каждое число во второй строке в K раз больше своего соседа из первой строки. Докажите, что каждое число из этой таблицы, умноженное на K, дает такой же остаток при делении на P, как и сумма соседних с ним по столбцу чисел.

2.4. Докажите, что при $P = 23$ существует расстановка, удовлетворяющая условиям задачи.

Сюжет 3

3.3. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более, чем в k раз. Докажите, что для любого $k < 2$ найдётся число N_k такое, что никакую кучу нельзя разложить более, чем на N_k куч.

3.4. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются строго меньше, чем в 2 раза. На какое наибольшее количество куч можно разбить кучу из 660 камней?