

1. *Константин произнёс названия всех натуральных чисел от 180 до 220 включительно, а Михаил — от 191 до 231 включительно. Кто больше произнёс слов и на сколько?*

Решение. Уберем встречающиеся у обоих числа: 191–220. Тогда у каждого останется по 11 чисел: у Константина 180–190, у Михаила 221–231. Заметим, что в названиях чисел 181–189, 221–229 и 231 по три слова, а в 180, 190 и 230 — по два. Получается, что Михаил произнес на одно слово больше.

Критерии. Полное решение — 5 баллов.

Разбиение чисел на группы из подряд идущих чисел с одинаковым количеством слов с одной ошибкой (например, группа чисел 211 — 219 неправильно отнесена к категории из трех слов, или допущена арифметическая ошибка в вычислениях) — 4 балла.

Приведено правильное арифметическое выражение для числа слов Константина и Миши, но не указано, какие числа по два, а какие по три слова — 4 балла.

Подсчет слов с помощью разбиения чисел на группы с несколькими ошибками (больше одной) — 3 балла.

Полный перебор (без выделения групп с одинаковым количеством слов) с одной-двумя ошибками — 3 балла.

Присутствует идея выкинуть совпадающие числа, в остальном решение неверное — 3 баллов.

Полный перебор (без выделения групп с одинаковым количеством слов) с более чем 2 ошибками — 2 балла.

Есть сравнение «круглых» чисел (и неверный общий подсчет) — 2 балла.

Только ответ (правильная разность) — 1 балл.

Подсчет количества чисел (не слов) и вывод, что слов одинаковое количество — 0 баллов.

2. *В ряд стоят числа от 1 до 9. Известно, что любые два числа, стоящие через одно, различаются на 1. Может ли число 4 быть крайним в этом ряду?*

Решение (1). Заметим, что через одно место от 1 может стоять только 2. Значит, число 1 либо крайнее, либо соседнее с крайним. Начнем считать места с этого края. Если 1 стоит на первом месте, то 2 стоит на третьем, на пятом может быть только 3, а 4 оказывается на седьмом месте. Если 1 стоит на втором месте, то 2 стоит на четвертом, на шестом может быть только 3, а 4 оказывается на восьмом месте. В обоих случаях 4 не стоит с краем.

Решение (2). Предположим, что число 4 стоит с краем. Начнем считать места с этого края. Тогда на третьем месте может стоять либо 3, либо 5.

В первом случае на пятом месте может быть только 2, на седьмом — 1, а на девятое ничего поставить нельзя. Противоречие.

Во втором случае на пятом может быть только 6, на седьмом — 7, на девятом — 8. Но тогда нельзя поставить число 9, так как через одно от него может быть только 8. Противоречие.

Значит, 4 не стоит с краю.

Критерии. Полное решение — 5 баллов.

Оба случая с неполными объяснениями (например, в доказательстве от противного не объяснено, почему после расстановки 4,5,6,7,8 возникнет противоречие) — 4 балла.

Указаны все расстановки без объяснений (с точностью до переворота, например 162738495, 192837465, 918273645, 948372615) — 3 балла.

Оба случая без объяснений (в доказательстве от противного 4-3-2-1- и 4-5-6-7-8, в доказательстве от единицы 1-2-3-4- и -1-2-3-4-, аналогично с 9) — 3 балла.

Один случай с объяснением — 3 балла.

Мысль о том, что с краю нечетные без объяснений, не доведенная до решения — 2 балла.

Ответ с примерами нескольких расстановок (не всех) без объяснений — 1 балл.

Только ответ — 0 баллов.

3. Из доски 6×6 вырезали угловые квадраты 2×2 . Расставьте на оставшихся полях по два коня каждого из 10 цветов так, чтобы в каждой клетке стоял ровно один конь и одноцветные кони были друг друга.

Решение. Пример подходящей расстановки показан на рисунке.

		1	2		
		8	9		
8	9	7	1	2	3
7	6	5	3	10	4
		10	4		
		6	5		

Существуют и другие варианты.

Критерии. Верный пример — 5 баллов.

4. Девочка стоит на первом этаже 24-этажного дома, на 13-м, 16-м и 24-м этажах которого живут её подружки. Лестницы в доме нет, но есть лифт, который умеет перемещаться только на 7 или на 10 этажей вверх или вниз. Может ли девочка посетить всех подружек, совершив не более 10 переездов на лифте?

Решение. Да, может. Например: 1 — 11 — 21 — 14 — 24 — 17 — 10 — 20 — 13 — 6 — 16.

Критерии. Полностью верный пример — 5 баллов.

Правильный пример с количеством переездов > 10 — 3 балла.

Правильный пример со стартом с нулевого этажа вместо первого — 3 балла.

Утверждение, что может, так как 7 и 10 взаимно простые (без примера) — 1 балл.

Только ответ (да/нет) — 0 баллов.

Неправильный пример из-за ошибки в вычислениях, но есть правильные перемещения между ключевыми этажами (например, 1—24 или 24—13—16) — 1 балл (за одну правильную последовательность между ключевыми этажами), 3 балла (за две).

5. *На фестиваль «Хоббиты — за культурное разнообразие!» прибыло более 20 участников. Корреспондент обнаружил, что среди любых 15 участников фестиваля найдётся не менее 4 людей и не менее 5 эльфов. Сколько хоббитов приняло участие в фестивале? Укажите все возможные ответы и докажете, что других нет.*

Решение. Предположим, что есть хотя бы один хоббит. Если среди участников наберется 10 людей, то в их компании с хоббитом и еще 4 любыми участниками не найдется 5 эльфов, что противоречит условию. Значит, людей не более 9. Поскольку всего участников более 20, то найдутся 12 участников, не являющихся людьми. Но тогда, добавив к ним 3 участников, получим компанию, противоречащую условию. А это означает, что хоббитов не было вовсе.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Обе существенных оценки без обоснований — 5 баллов.

Одна из существенных оценок (например, людей не более 9) — 2 балла (без объяснения), 3 балла (с объяснением).

Оценка «не более 6 хоббитов» — 1 балл.

Только правильный ответ (0 хоббитов) — 1 балл.

Решение с ответом «6 хоббитов» — 0 баллов.

6. *Чебурашка на свои деньги купил в магазине у девочки Гали столько же зеркал, сколько Гена — в магазине у Шапокляк. Если бы Гена покупал у Гали, у него было бы 27 зеркал, а если бы Чебурашка покупал у Шапокляк, у него было бы 3 зеркала. Сколько зеркал купили бы Гена и Чебурашка вместе, если бы Галя и Шапокляк договорились и установили цену на зеркала, равную среднему их нынешних цен? (Средним двух чисел называется половина их суммы, например, для чисел 22 и 28 среднее равно 25.)*

Решение. Пусть у Гены в x раз больше денег, чем у Чебурашки. Поменяем деньги Гены и Чебурашки местами. Тогда при втором способе покупки количество зеркал должно стать равным. Следовательно, $3x = \frac{27}{x}$, откуда $3x^2 = 27$, и

$x = 3$. Поэтому у Гены изначально денег было в три раза больше, чем у Чебурашки, а цена у Шапокляк в три раза выше, чем у Гали. Значит, денег всего у них было в четыре раза больше, чем у Чебурашки, а средняя цена вдвое больше, чем у Гали. Изначально Чебурашка смог купить $3 \cdot 3 = 9$ зеркал, тогда вдвоем с Геной при средней цене они купили бы $\frac{4 \cdot 9}{2} = 18$ зеркал.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Правильное решение с арифметической ошибкой или неточностью в обозначениях — 6 баллов.

В решении есть доказательство того, что деньги/цены отличаются в три раза, а далее сразу считается, что цена зеркала (количество денег) была такой-то — 5 баллов.

В решении есть только доказательство того, что деньги/цены отличаются в три раза — 4 балла.

В решении сразу говорится без доказательства, что цены отличались в три раза (или что в первом случае они купили по 9 зеркал), далее все объяснено правильно — 3 балла.

Сразу говорится, что цены отличались в три раза, и ответ — 2 балла.

Только ответ — 1 балл.

7. *В наборе были гирьки массой 5, 24 и 43 грамма, поровну каждого вида. Все имеющиеся гирьки взвесили, и масса оказалась равной 606060...60 граммам. Докажите, что а) хотя бы одна гирька потеряна; б) более 10 гирек потеряно.*

Решение. а) Заметим, что масса одного полного набора — 72 грамма. Это число делится на 8, а суммарная масса — нет, так как не делится на 8 число, образованное тремя последними цифрами (60), значит, что-то обязательно потеряли. б) Масса одного полного набора делится на 24, а общая масса — нет, зато она делится на 12. Поскольку масса гирек второго типа делится на 24, то суммарная масса потерянных гирек по 5 и по 43 не делится на 24 и делится на 12. Пусть потеряли a гирек по 5 и b гирек по 43. Тогда число $5a + 43b$ делится на 12, но не делится на 24. Поскольку $5a + 43b = 5(a - b) + 48b$, то $5(a - b)$ делится на 12, откуда $a - b$ делится на 12. Равными они быть не могут, т.к. если $a = b$, то $5a + 43b = 48b$ — делится на 24. Значит, a и b отличаются хотя бы на 12, т.е. потеряли как минимум 12 гирек, что больше 10.

Критерии. Полное решение — 11 баллов (4 + 7).

Только пункт а) — 4 балла.

Правильное решение пункта а) без объяснения того, почему суммарная масса не делится на 8 — 2 балла.

В пункте а) говорится только, что суммарная масса не делится на 72 — 1 балл.

В пункте б) есть только идея про то, что нужно набрать гирьками по 5 и по 43 количество, кратное 12 — 3 балла.