9–11 класс, 2 отбор

Алгебра

1. Квадратный трёхчлен $x^2 - ax + 15$ имеет два корня. Если один из них увеличить на 1, а другой уменьшить на 1, то получившиеся числа будут корнями трёхчлена $x^2 - ax + 16$. Найдите $|a|$.

2. При каком наибольшем значении параметра a для любых $x, y \in (0, a]$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^3 + y^3} \geqslant 8a(x + y)?$$

3. На 60-й параллели южной широты с постоянной скоростью дуют сильные западные ветра. На этой широте на равных расстояниях друг от друга стоят три города — A, B и C (порядок перечисления городов — с запада на восток). У Джона и Джека, живущих в городах B и C, есть одинаковые самолёты. Они оба хотят попасть на Праздник Океана в городе A, начинающийся в полдень. Для этого Джону нужно вылететь в 6 часов утра, а Джеку — в 18 часов предыдущего дня. Ранее указанное время — местное для каждого города. Во сколько раз скорость самолёта больше скорости ветра?

4. Найдите максимальное x, для которого выполнено равенство

$$\frac{201}{x^2(x+1)^2} + \frac{203}{(x+1)^2(x+2)^2} + \frac{205}{(x+2)^2(x+3)^2} + \ldots + \frac{399}{(x+99)^2(x+100)^2} = \frac{3}{40000}.$$

Комбинаторика

1. Андрей и Коля выписали несколько четырехзначных чисел. Андрей выписал все такие числа, у которых первая цифра равна произведению трех других, а Коля все такие, у которых последняя цифра равна произведению трех других. Оказалось, что Коля выписал больше чисел, чем Андрей. На сколько?

2. Сколько существует способов вырезать по линиям сетки прямоугольник из доски 10×10 таким образом, чтобы он не содержал в себе второй клетки второго столбца и восьмой клетки девятого столбца?

3. Изначально на столе есть кучки из $1, 2, 3, \ldots, 100$ спичек. Каждую минуту Вася берет из каждой кучки по одной спичке, затем одну оставляет себе, а из всех остальных складывает новую кучку, процесс продолжается до тех пор пока спички не кончатся. Сколько раз Вася положит на стол кучку, размер которой будет больше, чем у всех остальных кучек, уже лежащих на столе?

4. Устройство iCalc содержит экран с одним числом x и две кнопки. При нажатии на левую кнопку число x заменяется на $\lfloor x/3 \rfloor$, а при нажатии на правую — на $9x+1$. Вначале на экране высвечивается число 0. Сколько натуральных чисел, меньших 2017, может быть получено в результате произвольной последовательности нажатий? (В промежуточных результатах могут возникать и числа, большие 2017.)

Геометрия

1. Стороны тупоугольного треугольника (в порядке возрастания) — целые числа 6, 8 и x. Найдите сумму всевозможных значений x.

2. Четыре различные окружности радиуса 1 проходят через точку O так, что касательные в точке O к любым двум перпендикулярны или совпадают. Пятая окружность с центром в O касается всех четырех окружностей. Чему равна площадь части круга, ограниченного пятой окружностью, которая не попадает в первые четыре окружности.

3. Треугольник со сторонами 6, 5 и 5 разрезан тремя прямыми, параллельными сторонам треугольника, каждая из которых делит его площадь пополам. Найдите площадь трапеции, ограниченной этими прямыми и большей стороной исходного треугольника.

4. $ABCD$ и $BCDE$ — равнобедренные трапеции (BC параллельно AD и CD параллельно BE). O — точка пересечения BE и DA. $CE = 6$, $CD = 5$, $OE = 2$. Найдите AE.

Теория чисел

1. Отношение двух натуральных чисел равно $\frac{25}{9}$, а их наименьшее общее кратное — кубу их наибольшего общего делителя. Найдите меньшее из этих чисел.

2. Для натурального четного $x > 10$ укажите натуральное число y, такое, что $x < y < x^2 + 100x + 1$ и $y^2 + 100y + 1$ делится на $x^2 + 100x + 1$. (Ответ можно давать в виде выражения, содержащего x).

3. Назовём хорошим числом степень тройки (с натуральным показателем), не являющуюся кубом натурального числа. Найдите наименьшее натуральное число, кратное тринадцати, представимое в виде суммы попарно различных хороших чисел.

4. Миша перемножил 4 различных простых числа a, b, c, d и получил число N. Затем он выписал все варианты представления N в виде произведения трёх натуральных множителей (варианты, отличающиеся порядком множителей, например, выражения $1 \cdot 1 \cdot N$ и $N \cdot 1 \cdot 1$, считаются различными) и нашёл сумму всех выписанных множителей. Найдите ее и вы.