Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 22 декабря 2019 года
11 класс. Основная и выводная аудитория

Сюжет 1.

На n карточках написали по k чисел, сумма на каждой карточке равна m. Оказалось, что любой набор из k неотрицательных чисел с суммой 1 можно получить, уменьшив некоторые числа на одной из карточек (наборы неупорядоченные). Пусть $a(n,k)$ — наименьшее m, при котором это возможно.

1.1. Найдите $a(2,2)$.

Решение. Ответ: $\frac{5}{4}$.

Пример: наборы $(1; \frac{1}{4})$ и $(\frac{3}{4}; \frac{1}{2})$.

Оценка. Ясно, что должен быть набор, содержащий 1, чтобы мажорировать $(1;0)$, и набор, в котором оба числа больше $\frac{1}{2}$, чтобы мажорировать $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Если это одна и та же пара, то сумма уже $\frac{3}{2}$. Если разные, то посмотрим на набор $(\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$: чтобы набор $(1; x)$ мажорировал его, должно быть $x \geqslant \frac{1}{4}$, а чтобы набор с парой чисел, больших $\frac{1}{2}$ мажорировал — это должен быть набор, как минимум $(\frac{3}{4}; \frac{1}{2})$. Легко видеть также, что указанный набор подходит. □

1.2. Докажите, что найдется n такое, что $a(n, 10^{100}) \leqslant 1 + 10^{-100}$.

Решение. Рассмотрим все возможные способы записать число $1 + 10^{-100}$ в виде суммы положительных рациональных дробей со знаменателем 10^{200} (не обязательно несократимых). Очевидно, что это количество конечно, его и обозначим за n — записав все соответствующие наборы на карточки, убедимся, что такой набор карточек подходит. Действительно, рассмотрим любой набор с единичной суммой. Заменим в нём каждое число на ближайшую сверху дробь со знаменателем 10^{200}. При таком округлении сумма увеличится не более, чем на $10^{100} \cdot \frac{1}{10^{200}} = 1/10^{100}$, значит получится один из наших наборов или аналогичный набор с меньшей суммой. Произвольно увеличив числители некоторых дробей так, чтобы сумма стала равной $1 + 10^{-100}$, мы превратим набор в числа на одной из карточек, которая, таким образом, мажорирует исходный набор с единичной суммой. □

1.3. Докажите, что $a(2,4) < \sqrt{3}$.

Решение. Рассмотрим, например, следующую пару наборов:

$$\left(\frac{21}{34}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{и} \quad \left(1, \frac{13}{34}, \frac{13}{68}, \frac{13}{102}\right).$$

Сумма в каждом равна $\frac{347}{204}$, это даже меньше,чем 1,71, а $\sqrt{3} = 1{,}73\ldots$.

Проверим, что эта пара наборов мажорирует все нужные четвёрки. Ясно (*), что в упорядоченной тройке с суммой x среднее число — не больше, чем $\frac{x}{2}$, а малое — не больше, чем $\frac{x}{3}$; аналогичное верно для четвёрок. Действительно, если максимальное число в четвёрке больше $\frac{21}{34}$, то второе по величине — не больше,чем $\frac{13}{34}$, третье не больше $\frac{13}{68}$ а самое маленькое не больше $\frac{13}{102}$, значит такая четверка мажорируется вторым набором. Аналогично, если максимальное число не больше, чем $\frac{21}{34}$, то оно мажорируется первым набором.

Как прийти к этому решению?

Рассмотрим ситуацию, в которой в первой четверке максимальное число равно 1, а во второй — $a < 1$. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ мы должны уметь накрывать четверку $(a+\varepsilon; 1-(a+\varepsilon); 0; 0)$

и вторая наша четверка сделать этого не сможет. Значит, второе слева число в первой четверке не меньше $1-a$. Теперь, рассмотрев для всех $\varepsilon > 0$ четверки вида $(a+\varepsilon; \frac{1-(a+\varepsilon)}{2}; \frac{1-(a+\varepsilon)}{2}; 0)$, получим, что третье число в первой четверке не меньше, чем $\frac{1-a}{2}$, а рассмотрев для $\varepsilon > 0$ четверки вида $(a+\varepsilon; \frac{1-(a+\varepsilon)}{3}; \frac{1-(a+\varepsilon)}{3}; \frac{1-(a+\varepsilon)}{3})$ — что четвертое число первой четверки — это хотя бы $\frac{1-a}{3}$. Значит, сумма в первой четверке хотя бы

$$1 + (1-a) + \frac{1-a}{2} + \frac{1-a}{3} = \frac{17-11a}{6}.$$

Далее разберем случай, в котором четверки $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0)$ и $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)$ накрываются второй суммой. Тогда четверка $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$ также накрывается второй суммой (если мы, конечно, не хотим сумму в первой четверке, большую 1,75). В такой ситуации второе число во второй четверке хотя бы $\frac{1}{2}$, третье — хотя бы $\frac{1}{3}$, четвертое — хотя бы $\frac{1}{4}$. Значит, сумма во второй четверке хотя бы $a + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12a+13}{12}$. Теперь заметим, что все пары вида $(1; 1-a; \frac{1-a}{2}; \frac{1-a}{3})$ и $(a; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$ — подходят. Действительно (*), если наибольшее число попадает в полуинтервал $(a; 1]$, то тогда следующее по размеру не больше, чем $1-a$, третье — не больше, чем $\frac{1-a}{2}$, а четвертое — не больше, чем $\frac{1-a}{3}$. Аналогично разбирается случай, когда наибольшее число в четверке попадает в интервал $[\frac{1}{2}; a]$. Значит, любой подходящий вариант может быть сведен к парам такого вида без увеличения суммы. Если $\frac{17-11a}{6} \neq \frac{12a+13}{12}$, то, очевидно, можно изменить a так, чтобы эти выражения стали равны и ближе друг к другу, максимальное из них, соответственно, уменьшится. Если же $\frac{17-11a}{6} = \frac{12a+13}{12}$, то $34 - 22a = 12a + 13$, а значит $a = \frac{21}{34}$. Сумма в четверках в этом случае равна $\frac{21}{34} + \frac{13}{12} = \frac{347}{204} < \sqrt{3}$. □

1.4. Ограничена ли последовательность $a(2,k) - a(1,k)$?

Решение. Ответ: нет. Вычислим $a(1,k)$. Как уже отмечалось, для всякого $l \leqslant k$ должна быть карточка, в которой l-ое по величине число не меньше, чем $\frac{1}{l}$. Если карточка всего одна, то сумма на этой карточке, таким образом, не меньше $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$. С другой стороны, карточка $(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k})$, очевидно, подходит, т.к. в наборе с единичной суммой l-ое по величине число не больше $\frac{1}{l}$, так что $a(1,k) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$. Теперь рассмотрим произвольную пару натуральных чисел $l < k$, соотношение между которыми мы уточним позднее, и предъявим два набора, вдвоём мажорирующих все наборы с единичной суммой: а именно

$$\Bigg(\underbrace{\frac{1}{l}, \frac{1}{l}, \ldots, \frac{1}{l}}_{l \text{ раз}}, \frac{1}{l+1}, \frac{1}{l+2}, \frac{1}{l+3}, \ldots, \frac{1}{k}\Bigg)$$

и

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{l}, \frac{l-1}{l^2}, \frac{l-1}{l(l+1)}, \frac{l-1}{l(l+2)}, \ldots, \frac{l-1}{l(k-1)}\right).$$

Действительно, рассмотрим любой упорядоченный по убыванию набор $(a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k)$ с единичной суммой. Ясно, что $a_i \leqslant 1/i$ при любом i и поэтому первая карточка мажорирует любой набор с единичной суммой, в котором все числа не превосходят $1/l$.

Пусть, напротив, $a_1 > \frac{1}{l}$. Тогда для любого i имеем

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{l+i} < 1 - \frac{1}{l}, \quad \text{откуда } a_{l+i} \leqslant \frac{l-1}{l(l+i-1)}.$$

Поэтому любой набор с $a_1 > \frac{1}{l}$ мажорируется второй из наших карточек.

Осталось убедиться, что разность между $a(1,k)$ и максимумом из сумм в этих двух наборах может быть сделана (при подходящем выборе l и k) сколь угодно большой. Действительно, сумма на первой карточке отличается от $a(1,k)$ на

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{l-1} - \frac{l-1}{l} > \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{l-1},$$

и эта величина при достаточно больших l может быть сделана, как известно, сколь угодно большой. Теперь зафиксируем произвольное l и посмотрим на вторую карточку: сумма чисел на ней меньше, чем $a(1,k) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$, на

$$\frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} + \cdots + \frac{1}{k} - \frac{l-1}{l}\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l+1} + \ldots + \frac{1}{k-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{l}\left(\frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} + \cdots + \frac{1}{k-1}\right) + \frac{1}{k} - \frac{l-1}{l^2} > \frac{1}{l}\left(\frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} + \ldots + \frac{1}{k-1}\right) - 1.$$

Поскольку выражение в скобках при фиксированном l и неограниченном k может быть сделано сколь угодно большим, то можно выбрать k так, что эта разность будет больше разности между $a(1,k)$ и первой суммой, которая одним лишь выбором l может быть сделана сколь угодно большой для произвольного $k > l$. Утверждение доказано. $\square$

Сюжет 2.

Две окружности, вписанные в угол с вершиной R, пересекаются в точках A и B. Через A проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке C, а большую — в точке D. Оказалось, что $AB = AC = AD$.

2.1. Пусть C и D совпали с точками касания окружностей и угла. Докажите, что угол R прямой.

Решение. Треугольник BCD прямоугольный (медиана — половина гипотенузы). Значит, сумма дуг AC и AD соответствующих окружностей равна $2 \cdot 90° = 180°$, а сумма соответствующих углов между хордой и касательной $CDR + DCR = 90°$, поэтому $\angle R = 90°$. $\square$

2.2. Пусть C и D совпали с точками касания окружностей и угла. Чему может быть равен угол ADR?

Решение. $15°$. Треугольник RAB равносторонний — $RA = CD/2 = AB$ и $RA = RB$ по симметрии. Отсюда симметричные отрезки RA, RB образуют со сторонами углы, равные $\frac{90°-60°}{2} = 15°$ и этому же равен $\angle ADR$ (т.к. $AD = AR$). $\square$

2.3. Докажите, что если $\angle R$ прямой, то C и D совпадают с точками касания окружностей и угла.

Решение. *Первый способ.* Выполним инверсию i относительно окружности с центром в A и радиусом AB. Имеем $i(B) = B$, $i(C) = C$, $i(D) = D$, и наши две окружности превращаются в прямые BC, BD, образующие прямой угол, а стороны исходного угла — в пару окружностей, вписанных в этот угол, перпендикулярных друг другу (как и соответствующие прямые до инверсии) и пересекающихся в точках $A, S = i(R)$. Вычислим отношение их радиусов — это легко делается применением теоремы Пифагора к треугольнику AO_1O_2 со сторонами $r_1, r_2, \sqrt{2}(r_2 - r_1)$ (здесь O_1, O_2 — центры новых окружностей, $r_1 < r_2$ — радиусы). Получается $\frac{r_2}{r_1} = 2 + \sqrt{3}$; будем считать $r_1 = 1, r_2 = 2 + \sqrt{3}$.

Введём связанную с нашим прямым углом систему координат, тогда центры имеют координаты $(1,1)$ и $(2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$, а точки касания — $X_1 = (1,0), X_2 = (0,1), Y_1 = (0, 2+\sqrt{3}), Y_2 = (2+\sqrt{3}, 0)$. Середина X_1Y_1 — это $(\frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$, и, считая расстояния от неё до O_1 и O_2, убеждаемся, что это точка пересечения наших окружностей,как и середина X_2Y_2. Значит, эти середины — точки A, R. Поскольку A не лежит на биссектрисе угла, то прямая, из которой наш угол высекает отрезок с серединой A, единственна, так что соответствующая пара точек X_i, Y_i совпадает с парой C, D.

Второй способ (без инверсии). Из условия легко следует, что радиусы окружностей перпендикулярны: отрезки AC и AD симметричны AB относительно соответствующих радиусов, а C, A, D лежат на одной прямой.

Кроме того, из этой симметричности ясно, что такие точки C и D единственны. Значит, если мы покажем, что точки касания подходят на их роль, мы победим.

Пусть радиус маленькой окружности равен 1, большой — R. Тогда из теоремы Пифагора для $\triangle O_1O_2A$ получим: $\left(\sqrt{2}(R-1)\right)^2 = 1^2 + R^2$. У этого уравнения ровно одно решение, где $R > 1$, а именно $R = 2 + \sqrt{3}$.

Пусть C', D' — точки касания первой и второй окружностей с разными сторонами угла. Введём систему координат параллельно сторонам угла, тогда

$$C' = (0, 1), \quad D' = (2 + \sqrt{3}, 0).$$

Пусть A' — середина этого отрезка, тогда не очень трудно проверить, что она лежит на обеих окружностях:

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2 - \sqrt{3}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} + \sqrt{3} + \frac{9}{4} + 3 + 3\sqrt{3} = 7 + 3\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$$

То есть можно считать $A' = A$. Осталось убедиться, что $AB = \frac{1}{2}C'D' = AC' = AD'$.

$$\frac{1}{2}C'D' = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})$$

(последнее равенство можно проверить, возведя в квадрат). По симметрии точка B имеет координаты $(\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2})$, значит,

$$AB = \sqrt{2 \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3}).$$

Ура!

□

2.4. Какие значения может принимать угол RAO_1, где O_1 — центр меньшей окружности?

Решение. Исполним ту же самую инверсию, что и в предыдущем пункте, вновь получим прямой угол и вписанную в него пару окружностей. Прямая AS пересекает стороны угла под 45 градусов, значит, то же делает эта же прямая ($i(AS) = AR = AS$) с исходными окружностями. Поэтому и угол RAO (O — центр меньшей окружности) равен $90° - 45° = 45°$. □

Сюжет 3.

В этом сюжете разрешается использовать (без обоснования) так называемую *малую теорему Ферма*, гласящую, что для всякого целого числа a и простого натурального числа p справедливо соотношение «$a - a^p$ делится на p без остатка».

Итак, $p > 2$ — простое число. Маша должна понять, есть ли среди чисел

$$a^1 + b^1,\ a^2 + b^2,\ \ldots,\ a^{p-1} + b^{p-1}$$

значения, дающие одинаковые остатки от деления на p.

3.1. Пусть $a = 4$, $b = 9$. Докажите, что искомая пара найдётся.

Решение. По МТФ $4^{p-1} + 9^{p-1} \equiv 2$, но в то же время и $4^{\frac{p-1}{2}} + 9^{\frac{p-1}{2}} = 2^{p-1} + 3^{p-1} \equiv 2$. $\square$

3.2. Пусть $a = 4$, $b = 3$. Докажите, что найдётся искомая пара, содержащая одно из крайних чисел.

Решение. Если $p = 3$, то всё ясно.

Если $3^{(p-1)/2} \equiv 1$, то остальное как в предыдущем пункте.

Иначе же $3^{(p-1)/2} \equiv -1$. Например, потому что из МТФ $3^{p-1} \equiv 1$, значит,

$$\left(3^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(3^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \vdots\, p.$$

Тогда

$$4^{\frac{p-1}{2}+2} + 3^{\frac{p-1}{2}+2} \equiv 16 - 9 \equiv 7 = 4^1 + 3^1.$$

$\square$

3.3. Докажите, что искомая пара найдётся при $a = 4$, $b = 7$.

Решение. Случаи $p \leqslant 7$ разбираются руками. Дальше, аналогично предыдущим пунктам, если $7^{(p-1)/2} \equiv 1$, то всё ясно. Иначе $7^{(p-1)/2} \equiv -1$, а тогда для $k = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$

$$4^k + 7^k + 4^{\frac{p-1}{2}+k} + 7^{\frac{p-1}{2}+k} \equiv 4^k + 4^{\frac{p-1}{2}+k} \equiv 2 \cdot 4^k.$$

Если бы остатки не повторялись, каждый бы встречался по разу, и тогда их сумма была бы равна 0. Но тут, как мы видим, их сумма равна

$$2(4 + 4^2 + \ldots + 4^{\frac{p-1}{2}}) = 2 \cdot \frac{4^{\frac{p+1}{2}} - 4}{4 - 1} \equiv \frac{4}{3} \cdot (4^{\frac{p-1}{2}} - 2) \equiv \frac{4}{3} \cdot -1 \not\equiv 0.$$

$\square$

3.4. Докажите, что искомая пара найдётся, если $a = 2$, $b = 3$, а $\frac{p-1}{2}$ — простое.

Решение.

Лемма 1. *Пусть $q > 2$ простое и $k < q$ таково, что для любого $x = 1, 2, \ldots, q-1$ число x и остаток kx от деления на q имеют разную чётность. Тогда $k = q - 1$.*

Доказательство леммы 1. Подставляя $x = 1$, получаем, что k чётно, а значит, kx всегда чётно, тогда остаток kx имеет ту же четность, что и неполное частное $[\frac{kx}{q}]$. Теперь подставляем $x = 2$, тогда $[\frac{2k}{q}] < 2$ и нечетно, т.е. $[\frac{2k}{q}] = 1$. Теперь подставляем $x = 3$, тогда $1 \leqslant [\frac{3k}{q}] < 3$ и $[\frac{3k}{q}]$ четно, т.е. $[\frac{3k}{q}] = 2$. Продолжая это, доходим до равенства $[\frac{(q-1)x}{q}] = q - 2$, что невозможно при $k \leqslant q - 2$, значит, $k = q - 1$. $\square$

Следствие 1. *Пусть q простое, k нечётное, $k + 1$ не кратно $2q$. Тогда найдется l такое, что у обоих чисел l, kl остатки по модулю $2q$ заключены строго между 0 и q.*

Доказательство. Действительно, попробуем в качестве l все числа от 1 до $q - 1$. Пусть все пары l, kl не подошли, т.е. все kl имеют остатки по модулю $2q$, большие q. Это значит, что чётность остатка kl по модулю q противоположна четности остатка kl по модулю $2q$ (q — нечётно), а она совпадает с четностью l (т.к. k нечётно), и мы попадаем в условия леммы. $\square$

Перейдём к решению задачи. Предположим, что все остатки различны. Посмотрим на порядки 2 и 3 по модулю p. (Порядок a по модулю p — минимальное натуральное k такое, что $a^k - 1$ (или числитель соответствующей несократимой дроби,если a — дробь) кратно p; это k мы будем обозначать $\mathrm{ord}_p(a)$.) По МТФ они могут быть равны лишь $1, 2, q, 2q = p - 1$. Первые два случая проигнорируем, а случаи, когда хотя бы один из порядков равен q, идентичны разобранным в пунктах 1 и 3. Пусть порядки $2q$, в частности все остатки $2, 2^2, \ldots, 2^{p-1}$, различны (иначе, если 2^a и 2^b дают одинаковые остатки, то $2^a - 2^b$, а значит и $2^{a-b} - 1$, кратно p, но $a - b < p - 1$) и найдётся такое m, что $2^m = 3$. Отметим также, что в этом случае $2^q = 3^q = -1$, так что если при некотором k имеем $2^k + 3^k = 0$, то и $2^{k\pm q} + 3^{\pm q} = -(2^k + 3^k) = 0$, так что нарушается условие различности остатков. Поэтому в нашей последовательности встречаются по разу все *ненулевые* остатки.

Подберём по следствию 1 такое $0 < l < q$, что $-ml$ при делении на $2q$ имеет остаток меньше q, назовём этот остаток r, $r + ml$ делится на $2q$.

Теперь изучим сумму $\sum_{k=1}^{p-1}(2^k + 3^k)^{r+l}$ по модулю p. С одной стороны, выражение в скобках пробегает все ненулевые остатки, а число $r + l < q + q$ не кратно $p - 1 = 2q = \mathrm{ord}(2)$, так что эту сумму можно посчитать как сумму геометрической прогрессии с неединичным знаменателем 2^{r+l}, и она равна нулю.

Посчитаем эту же сумму другим способом. Раскрыв все скобки по биному, перегруппировав слагаемые и переставив множители в показателях степеней, мы получим сумму геометрических прогрессий вида $C_{r+l}^i \sum(2^i 3^{r+l-i})^k$. Докажем, что ровно одна из этих прогрессий постоянна, а значит, ровно одно из указанных выражений ненулевое (тут надо отметить, что $r, l < q$, так что $r + l < 2q = p - 1$, поэтому появляющиеся биномиальные коэффициенты не кратны p). Это даст требуемое противоречие.

Действительно, при $i = r$ получаем, учитывая $2^m = 3$, что $2^r 3^{r+l-r} = 2^{r+ml} = 1$, т.к. $r + ml$ делится на $2q$. С другой стороны, если $2^{r+s}3^{r+l-r-s} = 1$, при некотором $s \in [-r, l]$ то, деля, получаем $2^s 3^{-s} = 1$ то есть $(2/3)^s = 1$. Получаем, что $\mathrm{ord}_p(2/3) \leqslant \max(r, l) < q$, значит $\mathrm{ord}_p(2/3)$ равен 1 или 2, что может быть лишь при $p = 5$; этот случай проверяется непосредственно. $\square$