Решения и критерии заочного тура олимпиады ЮМШ
6 класс

1. Словосочетание «три слога» описывает само себя, потому что в нем действительно три слога. Найдите такое числительное, чтобы словосочетание, состоящее из него и слова «буква» в правильном падеже («буква», «буквы» или «букв»), тоже описывало само себя.

Решение. Десять букв.

Критерии.

- ◇ Верный ответ — 2 балла.
- ◇ Неправильный ответ (в частности, не содержащий слова «буква») — 0 баллов.

2. Как-то ночью часы (со стрелками) сломались. Часовая стрелка пошла вдвое быстрее, а минутная — вдвое медленнее, чем они шли изначально. Андрюша проснулся, когда часовая стрелка указывала на 6, а минутная — на 12. Могли ли часы сломаться в полночь?

Решение. Допустим, что часы сломались в полночь. До момента, когда Андрюша проснулся, прошло чётное число часов — ведь минутная стрелка сделала целое число оборотов, а каждый оборот она теперь делает за два часа. Но тогда часовая стрелка должна указывать на число, делащееся на 4, ведь она идёт вдвое быстрее обычной. Поэтому на 6 она указывать не могла. Значит, и часы сломаться в полночь не могли.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 6 баллов.
- ◇ Решение в предположении, что прошло три часа (т. е. не учитывается переход через 12) — 2 балла.
- ◇ Решение в предположении, что минутная стрелка на 12 минутах, или что при обороте минутной стрелки часовая сдвигается ещё на час — 0 баллов.

3. Можно ли в каждую клетку шахматной доски поставить ладью, коня или слона так, чтобы ладьи били только коней, кони — только слонов, а слоны — только ладей?

Решение. Нельзя. Рассмотрим три случая.

- На клетке A1 стоит ладья. Тогда на клетке A2 должен быть конь, на C1 — слон, на B2 — ладья, на C2 — конь, и этот конь бьёт ладью на A1, чего не должно быть.
- На клетке A1 стоит конь. Тогда на C2 стоит слон, на B3 — ладья, а её бьёт конь на A1.
- На A1 стоит слон. Тогда на B2 — ладья, на A2 и B1 — кони, на C1 — слон, на B2 — ладья, которую бьёт конь B1.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 6 баллов.
- ◇ Решение в предположении, что все фигуры должны быть — 4 балла.
- ◇ Нарушена причинно-следственная связь (например, фраза «по диагонали от ладьи обязательно стоит слон, т. к. слон бьёт только ладей») — 2 балла.
- ◇ Если не учтены края — снимался балл.
- ◇ Если нарисована схема, кто где стоит, но приходится догадываться, как именно ребёнок рассуждал — снимался балл.

◇ Если ребёнок считает, что ладья и слон бьют через фигуры — 0 баллов.

4. В школе в день Святого Валентина мальчики дарили валентинки девочкам, и наоборот. Каждый мальчик подарил пяти девочкам валентинки с признанием в любви. Девочки же оказались гораздо скромнее: каждая подарила валентинки с признанием в любви всего четырём мальчикам. Пять школьников (три Валентины и два Валентина) получили поровну валентинок, а все остальные школьники — по две валентинки. Докажите, что мальчиков и девочек в школе поровну.

Решение. Пусть в классе m мальчиков и d девочек, и пусть Валентины получили по k писем. Тогда, так как количество посланных валентинок равно количеству полученных,

$$\begin{cases} 5m = 3k + 2(d-3) \\ 4d = 2k + 2(m-2). \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, второе — на 2, и вычтем их друг из друга, получая

$$10m - 12d = 4d - 6m,$$

откуда $16m = 16d$, то есть $m = d$.

Критерии.

◇ Верное решение — 6 баллов.

5. Натуральное число n таково, что сумма четырёх его некоторых различных натуральных делителей (возможно, включая само это число) равна $2n$. Чему может быть равна сумма четырёх наименьших натуральных делителей этого числа? Перечислите все варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение. Могут быть суммы 10, 11 и 12.

Докажем, что делители, дающие в сумме $2n$ — это n, $n/2$, $n/3$ и $n/6$.

В самом деле, если нет делителя n, то наибольшая возможная сумма равна

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} < 2n.$$

Если нет делителя $n/2$, то максимальная сумма равна

$$n + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} < 2n$$

Если нет делителя $n/3$, то максимальная сумма равна

$$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{5} < 2n.$$

Ну и оставшийся делитель — это

$$2n - n - \frac{n}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n}{6}.$$

Значит, у числа n есть делители 1, 2, 3, 6. Ещё могут быть (а могут и не быть) делители 4 и 5. Тогда сумма наименьших делителей может быть равна $1+2+3+4=10$ (например, для $n=12$), $1+2+3+5=11$ (для $n=30$) и $1+2+3+6=12$ (для $n=6$).

Критерии.

◇ Верное решение — 6 баллов.

◇ Если не доказано, что число обязательно делится на 2 и на 3, — 2 балла.

◇ Верное решение без приведённого примера (какое должно быть число) — 5 баллов.

6. Каждый мальчик дружит с 5 девочками, а все девочки — с разным числом мальчиков. Какое наименьшее количество детей может быть в этой компании?

Решение. Если есть девочка, которая ни с кем не дружит, откинем её (количество детей уменьшится, а условие задачи сохранится).

Пусть у нас m мальчиков и d девочек. Проведём отрезок между мальчиком и девочкой, если они дружат. Тогда от мальчиков проведено $5m$ отрезков, а от девочек не менее $\frac{d(d+1)}{2}$ отрезков. В самом деле, упорядочим девочек по возрастанию количества знакомств; тогда первая девочка дружит не менее чем с одним мальчиком, вторая не менее чем с двумя, и т. д. Заметим также, что отсюда следует неравенство $m \geqslant d$ (последняя девочка дружит не менее чем с d мальчиками, а значит, мальчиков хотя бы d).

Тогда
$$\frac{d(d+1)}{2} \geqslant 5m \geqslant 5d,$$
откуда $d \geqslant 9$ и $m \geqslant 9$. Пример на 9 мальчиков и 9 девочек строится легко: пусть девятая девочка знает всех мальчиков, восьмая — всех, кроме первого, первая — только первого мальчика, седьмая — кроме второго и третьего, вторая — только второго и третьего, и т. д.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 7 баллов.
- ◇ Только ответ — 1 балл.
- ◇ Ответ с примером — 2 балла.
- ◇ Бездоказательно используется, что количество связей у девочек $\frac{n(n+1)}{2}$ — не более 3 баллов.
- ◇ За ответ «1 девочка, 0 мальчиков» — 1 балл.

7. По одиннадцатикилометровой круговой трассе ездит много машин с постоянной скоростью 120 км/ч. В одном злополучном месте дороги стоит электронный полицейский. В каждый момент его жезл может находиться в одном из двух положений: поднятом или опущенном. Если машина проезжает мимо электронного полицейского с опущенным жезлом, она мгновенно сбрасывает скорость до 60 км/ч, а через минуту мгновенно разгоняется обратно. Если же жезл поднят, машина мгновенно останавливается, а через минуту срывается с места с первоначальной скоростью. Электронным полицейским управляет программист, который не видит расположения машин на дороге. Докажите, что программист может записать такую последовательность команд полицейского (сколько минут стоять с поднятым жезлом, затем — сколько с опущенным, и т. д.), чтобы сразу после последней команды все машины на трассе остановились.

Решение. Если полицейский стоит с опущенным жезлом, то любая машина делает полный круг за 6 минут: одну минуту она едет со скоростью 60 км/ч (т. е. проезжает 1 км), а остальное время — со скоростью 120 км/ч (т. е. проезжает 10 км за 5 минут).

Рассмотрим процедуру: электронный полицейский поднимает жезл и через минуту его опускает. В этот момент следующий за полицейским километр нет никаких машин (те машины, которые могли бы там находиться, остановлены поднятым жезлом). Затем полицейский ждёт с опущенным жезлом 6 минут — за это время все машины сделают полный круг и вернутся на те же места, т. е. за полицейским снова будет километровый пустой участок. Теперь полицейский снова поднимет жезл на минуту и снова его опустит — теперь за ним образовался трёхкилометровый пустой участок. Пусть полицейский повторит ту же процедуру ещё четыре раза и снова подождёт 6 минут. Тогда за ним образуется свободный 11-километровый участок, т. е. все машины окажутся прямо перед ним; он поднимает жезл и всех их останавливает.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 7 баллов.
- ◇ Описание метода без конкретики — 2 балла.