# Решения и критерии заочного тура олимпиады ЮМШ
# 7 класс

**1.** Словосочетание «три слога» описывает само себя, потому что в нем действительно три слога. Найдите такое числительное, чтобы словосочетание, состоящее из него и слова «буква» в правильном падеже («буква», «буквы» или «букв»), тоже описывало само себя.

**Решение.** Десять букв.

Критерии.

- ◇ Верный ответ — 2 балла.

**2.** Алёна вычеркнула из пятизначного числа, делящегося на 99, одну цифру, и оказалось, что получившееся четырёхзначное число снова делится на 99. Какая по порядку цифра могла была быть вычеркнута? (Ни исходное, ни получившееся числа не могут начинаться с нуля.)

**Решение.** Ответ: любую, кроме первой и второй Примеры:

$$99099 \to 9999$$
$$49500 \to 4950$$
$$99990 \to 9999$$

Для начала заметим, что по признаку делимости на 9, выкинули цифру 0 или 9.

Первую цифру выкинуть нельзя: т. к. она не 0, модуль разности между суммами цифр на четных и нечетных местах изменится, но не больше, чем на эту самую цифру, что поменяет остаток от деления числа на 11.

Пусть теперь из $\overline{abcde}$ (в котором $a+c+e-b-d \vdots 11$) выкинули вторую цифру, получили $\overline{acde}$, в котором $a+d-c-e \vdots 11$. Сложив выражения, получим $2a-b \vdots 11$, что невозможно для $b=0$ или $b=9$.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 6 баллов.
- ◇ Только доказательство того, что первые две нельзя вычеркнуть — 3 балла.
- ◇ Примеры + доказательство того, что первую нельзя вычеркнуть — 3 балла.
- ◇ Только примеры — 2 балла.
- ◇ Только один пример — 1 балл.

**3.** В школе в день Святого Валентина мальчики дарили валентинки девочкам, и наоборот. Каждый мальчик подарил пяти девочкам валентинки. Девочки же оказались скромнее — каждая подарила валентинки всего четырём мальчикам. Пять школьников (три Валентины и два Валентина) получили поровну валентинок, а все остальные школьники — по две валентинки. Докажите, что мальчиков и девочек в школе поровну. **Решение.** Пускай мальчиков $X$, а девочек $Y$. Тогда девочкам подарено

$5G$ валентинок, девочками получено

$$2(Y-3)+3Q = 2Y+3Q-6,$$

где $Q$ — количество валентинок, полученых Валентинами. Понятно, что эти числа равны. Аналогично, мальчикам подарили $4L$ валентинок, мальчики получили

$$2(X-2)+2Q = 2(X-2+Q),$$

эти числа тоже равны. Из полученного уравнения получаем $X = 2Y + 2 - Q$, подставляя в первое, имеем

$$10L + 10 - 5Q = 2L + 3Q - 6,$$

откуда $8Y = 8Q - 16$ и $Q = Y + 2$. Подставляя в первое уравнение, получаем $5X = 5Y$, значит, $X = Y$, что и требовалось доказать.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 4 баллов
- ◇ Частные случаи — 0 баллов

**4.** Расстояние между двумя дворцами королевства Зенития 4 км. Король повелел построить между ними круглую Арену диаметром 2 км. Докажите, что где бы король ни повелел построить Арену, ГИБДД сможет провести дорогу между дворцами так, чтобы она была не длиннее 6 км.

**Решение.** Пусть отрезок между дворцами идет с запада на восток. Посмотрим на центр арены, если он, допустим, не севернее этого отрезка, то любая точка арены севернее этого отрезка не более, чем на 1 км. Значит, мы можем сначала пройти 1 км на север, потом 4 км параллельно отрезку, а потом — 1 км на юг. Так мы гарантированно управимся за 6 км, и не заденем арены. Аналогично, если центр севернее — обходим через юг.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 4 балла
- ◇ Нет пояснений, почему достаточно половины длины окружности — снимался балл.
- ◇ Число $\pi$ используется как 3,14 без округлений и оценок с нужной стороны — снимался балл.
- ◇ Решение в явном предположении, что центр арены лежит на отрезке, соединяющем дворцы — 2 балла.
- ◇ Вычисления без пояснений — 0 баллов.

**5.** Сумма трех наибольших натуральных делителей натурального числа $N$ в 10 раз больше суммы трёх наименьших его натуральных делителей. Найдите все возможные значения $N$. **Решение.**

Ответ: 40. Из условия, сумма трех наибольших делителей чётна. Значит $N$ четно (иначе там три нечетных слагаемых), более того $N$ делится на 4 (иначе это сумма нечетного $N/2$ и чётных $N$ и $N/p$, где $p$ — наименьший простой нечетный делитель). Значит наименьшие три делителя — $1, 2, 3$ или $1, 2, 4$. Подставляя, получаем уравнения $60 = 11N/6$ или $70 = 7N/4$, второе из которых имеет целое решение.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 6 баллов
- ◇ Угадан и проверен ответ — 1 балл
- ◇ Доказана четность $N$ — 1 балл
- ◇ Доказана делимость на 4 — 3 балла.
- ◇ Забыт случай $(1, 2, 3)$ — 4 балла.

**6.** На окружности через равные промежутки расставили 33 точки. Соседние точки соединили отрезками так, что получился 33-угольник. Каждую сторону этого 33-угольника покрасили в один из трёх цветов, и оказалось, что отрезков каждого цвета поровну. Докажите, что можно разбить 33-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники, покрасив каждую диагональ в один из тех же трёх цветов, чтобы каждый треугольник имел по стороне каждого цвета. **Решение.** Найдём на периметре две соседние разноцветные стороны и отрежем диагональю соответствующий треугольник (покрасив третью сторону в третий цвет), сведя задачу к многоугольнику с меньшим числом вершин. Будем действовать так дальше — надо только следить, чтобы не получалось многоугольника с одноцветным периметром — легко видеть, что в любой момент этого можно избежать, применив операцию не к ведущей к одноцветности паре рёбер, а к соседней. В конце останется треугольник. Заметим, что наша операция меняет четность количества каждого цвета на периметре, поэтому если в начале все четности были одинаковы, то и когда останется треугольник — тоже. Значит, у оставшегося треугольника по стороне каждого цвета, а разноцветность всех предыдущих треугольников следует из построения.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 8 баллов
- ◇ Идея последовательного отрезания треугольников — 1 балл

**7.** Два игрока по очереди выписывают друг за другом единицы или двойки. Тот, после чьего хода сумма нескольких последних цифр станет равной **(а)** 533; **(б)** 1000, проиграл. Кто выиграет, если оба игрока будут стремиться к победе?

**Решение.** **(а)** Выигрывает первый игрок. Первым ходом он выписывает число 1, а затем дополняет ход соперника до 3 (на единицу отвечает двойкой, на двойку — единицей). После 147 таких дополнений перед ходом второго на доске будут написаны цифры суммой 532, а значит, ход единицей для второго игрока будет проигрышным. Но для него будет проигрышным и ход двойкой, так как в этом случае 533 будет равняться сумма всех чисел, кроме первой выписаннной 1.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 5 баллов.
- ◇ Алгоритм без доказательства — 2 балла.
- ◇ Идея делимости на 3 — 1 балл.

**(б)** Выигрывает первый. Он начинает, выписывая число 2. Далее:

1. Если второй своим первым ходом выписывает 1, то первый выписывает 2. Дальше 331 раз первый дополняет ход второго до 3, как в пункте а). После этих операций будет ход второго при сумме чисел на доске равной 998. Значит, второму нельзя брать двойку. Но если он возьмет 1 (сделав сумму чисел на доске равной 999), то первый возьмет 2. Тогда сумма всех чисел будет равна 1001, всех кроме первого — 999, всех, кроме первого и второго — 998. Значит, следующим ходом второй проиграет.
2. если второй своим первым ходом выписывает 2, то первый тоже пишет 2. Тут снова возможны два варианта:

   i Своим вторым ходом второй выписывает число 1. Тогда первый тоже выписывает 1, и далее 330 раз дополняет ход второго до 3. После После этих операций будет ход второго при сумме чисел на доске равной 998. Значит, второму снова нельзя брать двойку. Если он берет 1, то первый берет 2. Тогда сумма всех чисел будет равна 1001, всех кроме первого — 999, всех, кроме первого и второго — 997. Значит, второму снова остается только взять 2. Тогда первый снова берет 2, и после этого его хода сумма всех, кроме первых двух равна 1001, кроме первых трех — 999, кроме первых четырех — 998. Это значит, что у второго игрока вновь нет не проигрывающего хода.

   ii Своим вторым ходом второй выписывает число 2. Тогда первый опять выписывает 1, и далее 330 раз дополняет ход второго до 3. После После этих операций будет ход второго при сумме чисел на доске равной 999. Теперь второму нельзя брать единицу. Если он берет 2, то первый берет 2. Тогда сумма всех чисел, кроме первого будет равна — 1001, всех, кроме первого и второго — 999. Значит, второму остается только взять 2. Тогда первый снова берет 2, и после этого его хода сумма всех, кроме первых трех равна 1001, кроме первых четырех — 999, кроме первых пяти — 998. Это значит, что у второго игрока вновь нет не проигрывающего хода.

Критерии.

- ◇ Полное решение — 8 баллов.