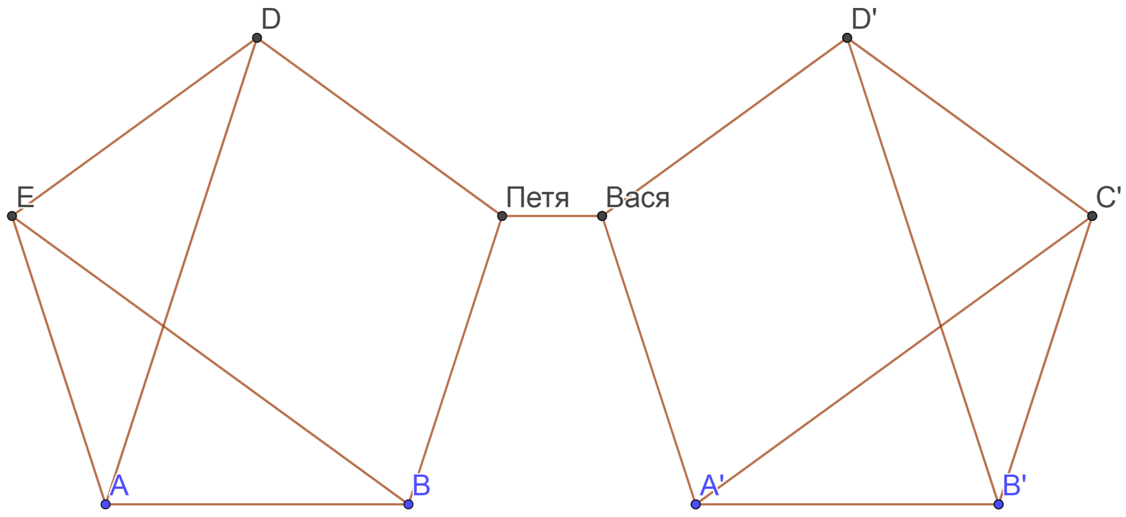
Решения и критерии заочного тура олимпиады ЮМШ
8 класс

1. В классе 10 человек, у каждого три друга среди одноклассников. Они разбились на 5 команд по 2 человека, в каждой команде — друзья. Учительница сказала переделиться по другому, так как Вася и Петя не должны быть в одной команде. Вася заметил: «Но тогда какая-то из команд обязательно не будет дружной». Приведите пример, как такое может быть.

Решение. Приведем пример. На данной картинке вершины(точки) – ученики, а ребра – дружбы



между ними. В этом случае они могут рабиться на пары. Например, A — B, E— D, Петя — Вася, D’ — C’, A’ — B’. Понятно, что их нельзя разбить, если Петя и Вася не будут в команде, так как тогда надо будет разбить на пары левую часть из 5 человек, что невозможно.

Критерии.

- ◇ Пример без пояснений — 2 балла.
- ◇ Если пример простой и не нуждается в пояснениях (как указанный в решении) — 4 балла.
- ◇ Полное решение — 4 балла.

2. У пяти патрициев есть по пять статуй, каждая стоит натуральное число сестерциев. Сначала патриции померились, у кого суммарная стоимость статуй больше, потом каждый расколотил свою самую дешёвую статую. Затем они померились опять, расколотили самые дешёвые из своих оставшихся статуй, и так ещё три раза, пока не уничтожили все статуи. Могло ли быть так, что единоличным победителем каждый раз оказывался кто-то новый?

Решение. Такое могло случиться. Например с такими наборами ценностей статуй:

$$\begin{array}{rccccc}
\text{I:} & 10^{10}+1, & 10^9, & 10^8, & 10^7, & 10^6 \\
\text{II:} & 10^{10}, & 10^9+10, & 10^8, & 10^7, & 10^6 \\
\text{III:} & 10^{10}, & 10^9, & 10^8+100, & 10^7, & 10^6 \\
\text{IV:} & 10^{10}, & 10^9, & 10^8, & 10^7+10^3, & 10^6. \\
\text{V:} & 10^{10}, & 10^9, & 10^8, & 10^7, & 10^6+10^4
\end{array}$$

Видно, что в их спорах по очереди будут побеждать V, IV, III, II, I.

Критерии.

◇ Пример без пояснений – 3 балла.

◇ Полное решение – 4 балла.

3. Андрей расставил в клетках доски 10×10 фишки ста различных цветов. Каждую минуту одна из фишек меняет цвет, причём меняться может только такая фишка, которая перед этой операцией была уникальной (то есть отличалась цветом от всех остальных) в своей строке или в своём столбце. Через N минут оказалось, что ни одна фишка больше не может перекраситься. Чему, самое меньшее, могло равняться N?

Решение. Посмотрим на момент, когда не осталось ходов. Пусть у нас осталось k цветов, тогда мы перекрасили хотя бы $100 - k$ клеток. Заметим, что если ничего нельзя перекрасить, то каждого цвета хотя бы 4 клетки. Итого, цветов осталось после этого процесса хотя бы 25 цветов. Значит, мы перекрасим хотя бы 75 клеток. Итого $N \geqslant 75$. Пример строится просто квадратиками 2×2. То есть разбиваем доску на квадратики 2×2 и каждый квадратик перекрашиваем в цвет его нижнего левого угла.

Критерии.

◇ Полное решение — 5 баллов.

◇ Только оценка — 3 балла.

◇ Пример — 1 балл.

4. Даны три вещественных числа, больших 1. Произведение любых двух из них больше, чем сумма этих двух. Докажите, что произведение всех трёх чисел больше, чем их сумма, увеличенная на 2.

Решение. Пусть $a \leqslant b \leqslant c$ — наши числа. Так как все числа положительные, при домножении на a, b или c с двух сторон знак неравенства не меняется. Дано, что $ab > a + b$, тогда

$$abc > (a + b)c = ac + bc > a + c + b + c = a + b + 2c.$$

Заметим, что $ac > a + c \geqslant 2a$. То есть $c > 2$. Значит,

$$abc > a + b + c + c > (a + b + c) + 2.$$

Критерии.

◇ Полное решение — 6 баллов.

◇ Доказано, что $abc > a + b + c + 1$, — 1 балл.

◇ На самом деле доказано нестрогое неравенство — 4 балла.

◇ Если в доказательстве перешли к $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$, но не доказали, что их произведение $(a - 1)(b - 1)(c - 1) > 1$, — снималось 2 балла.

5. Сумма трёх наибольших натуральных делителей натурального числа N в 10 раз больше суммы трёх наименьших его натуральыхн делителей. Найдите все возможные значения N.

Решение. Ответ: 40. Из условия, сумма трех наибольших делителей чётна. Значит N четно (иначе там три нечетных слагаемых), более того N делится на 4 (иначе это сумма нечетного $N/2$ и чётных N и N/p, где p — наименьший простой нечетный делитель). Значит наименьшие три делителя — $1, 2, 3$ или $1, 2, 4$. Подставляя, получаем уравнения $60 = 11N/6$ или $70 = 7N/4$, второе из которых имеет целое решение.

Критерии.

◇ Задача оценивается в 6 баллов.

- ◇ Доказана четность N — 1 балл.
- ◇ Если доказана делимость на 4 — 3 балла.
- ◇ Забыт случай $(1, 2, 3)$ — 4 балла.

6. В треугольнике ABC угол A равен 50°, BH — высота. Точка M на BC такова, что $BM = BH$. Серединный перпендикуляр к отрезку MC пересекает AC в точке K. Оказалось, что $AC = 2 \cdot HK$. Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Проведем перпендикуляр к BC из точки M. Пусть K' — точка его пересечения с AC. Тогда серпер к MC — средняя линия в $\triangle K'MC$, то есть $K'K = KC$. Из того, что $HK = KC + AH$, получаем $AH = HK'$. Прямоугльные треугольники BHA и BHK' по двум катетам, BHK' и BMK' равны по катету и гипотенузе. Тогда

$$\angle B = 3\angle AHB = 3 \cdot (90^\circ - 50^\circ) = 120^\circ.$$

Оставшийся угол C равен

$$180^\circ - 50^\circ - 120^\circ = 10^\circ.$$

Критерии.

- ◇ Полное решение — 6 баллов.
- ◇ Расположение точек считается очевидным, если пересекаются прямые. Если пересекаются окружности и нет пояснений к расположению точек — снимался балл.

7. На окружности через равные промежутки расставили 33 точки. Соседние точки соединили отрезками так, что получился 33-угольник. Каждую сторону этого 33-угольника покрасили в один из трёх цветов, и оказалось, что отрезков каждого цвета поровну. Докажите, что можно разбить 33-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники, покрасив каждую диагональ в один из тех же трёх цветов, чтобы каждый треугольник имел по стороне каждого цвета.

Решение. Найдём на периметре две соседние разноцветные стороны и отрежем диагональю соответствующий треугольник (покрасив третью сторону в третий цвет), сведя задачу к многоугольнику с меньшим числом вершин. Будем действовать так дальше — надо только следить, чтобы не получалось многоугольника с одноцветным периметром — легко видеть, что в любой момент этого можно избежать, применив операцию не к ведущей к одноцветности паре рёбер, а к соседней. В конце останется треугольник. Заметим, что наша операция меняет четность количества каждого цвета на периметре, поэтому если в начале все четности были одинаковы, то и когда останется треугольник — тоже. Значит, у оставшегося треугольника по стороне каждого цвета, а разноцветность всех предыдущих треугольников следует из построения.

Критерии.

- ◇ Верное решение — 8 баллов
- ◇ Идея последовательного отрезания треугольников — 1 балл

8. Два игрока по очереди выписывают друг за другом единицы или двойки. Тот, после чьего хода сумма нескольких последних цифр станет равной **(а)** 533; **(б)** 1000, проиграл. Кто выиграет, если оба игрока будут стремиться к победе?

Решение. **(а)** Выигрывает первый игрок. Первым ходом он выписывает число 1, а затем дополняет ход соперника до 3 (на единицу отвечает двойкой, на двойку — единицей). После 147 таких дополнений перед ходом второго на доске будут написаны цифры суммой 532, а значит, ход единицей для второго игрока будет проигрышным. Но для него будет проигрышным и ход двойкой, так как в этом случае 533 будет равняться сумма всех чисел, кроме первой выписанной 1.

Критерии.

- ◇ Полное решение пункта — 5 баллов.

(б) Выигрывает первый. Он начинает, выписывая число 2. Далее:

1. Если второй своим первым ходом выписывает 1, то первый выписывает 2. Дальше 331 раз первый дополняет ход второго до 3, как в пункте а). После этих операций будет ход второго при сумме чисел на доске равной 998. Значит, второму нельзя брать двойку. Но если он возьмет 1 (сделав сумму чисел на доске равной 999), то первый возьмет 2. Тогда сумма всех чисел будет равна 1001, всех кроме первого — 999, всех, кроме первого и второго — 998. Значит, следующим ходом второй проиграет.

2. если второй своим первым ходом выписывает 2, то первый тоже пишет 2. Тут снова возможны два варианта:

   i Своим вторым ходом второй выписывает число 1. Тогда первый тоже выписывает 1, и далее 330 раз дополняет ход второго до 3. После После этих операций будет ход второго при сумме чисел на доске равной 998. Значит, второму снова нельзя брать двойку. Если он берет 1, то первый берет 2. Тогда сумма всех чисел будет равна 1001, всех кроме первого — 999, всех, кроме первого и второго — 997. Значит, второму снова остается только взять 2. Тогда первый снова берет 2, и после этого его хода сумма всех, кроме первых двух равна 1001, кроме первых трех — 999, кроме первых четырех — 998. Это значит, что у второго игрока вновь нет не проигрывающего хода.

   ii Своим вторым ходом второй выписывает число 2. Тогда первый опять выписывает 1, и далее 330 раз дополняет ход второго до 3. После После этих операций будет ход второго при сумме чисел на доске равной 999. Теперь второму нельзя брать единицу. Если он берет 2, то первый берет 2. Тогда сумма всех чисел, кроме первого будет равна — 1001, всех, кроме первого и второго — 999. Значит, второму остается только взять 2. Тогда первый снова берет 2, и после этого его хода сумма всех, кроме первых трех равна 1001, кроме первых четырех — 999, кроме первых пяти — 998. Это значит, что у второго игрока вновь нет не проигрывающего хода.

Критерии.

- ◇ Полное решение пункта — 8 баллов.
- ◇ Разобран только первый случай — 3 балла.