Юношеская математическая школа СПбГУ

# XVI олимпиада ЮМШ

Задачи и решения

2012/13

Санкт-Петербург

# XVI олимпиада ЮМШ

## Задачи и решения

## 2012/13 уч.г.

Санкт-Петербург

# Предисловие

Начиная с 1997 года, в Санкт-Петербурге ежегодно проводится олимпиада Юношеской математической школы. Эта брошюра содержит материалы XVI олимпиады, проведённой в 2012/13 учебном году.

Первый тур для 5–8 классов проходил в форме заочной олимпиады. Ученикам 5 и 6 классов были предложены одинаковые задачи, также одинаковыми были варианты для 7 и 8 классов. Итоги подводились отдельно по каждому классу. Участники должны были представить свою работу не позднее 6 октября. Полное решение каждой задачи оценивалось исходя из заранее определённого количества баллов, а критерии оценки для неполных решений вырабатывались жюри уже на этапе проверки работ.

Первый тур для 9–11 классов состоялся 17 января в форме индивидуальной (личной) интернет-карусели из 15 задач. Более подробно о правилах проведения математических каруселей можно узнать на сайте http://karusel.desc.ru/

На заключительный тур приглашались участники, успешно выступившие на первом туре, а также победители олимпиады ЮМШ прошлого года. Этот тур олимпиады традиционно является устным. Олимпиада для учащихся 5–6 классов прошла 25 ноября, для 7–8 классов – 2 декабря. Участникам предлагались четыре задачи, на которые отводилось 3 часа (в 5 классе – 2,5 часа). Решившие три задачи переходили в другую аудиторию, где им предлагалось ещё три задачи, а время увеличивалось на 1 час.

Заключительный тур для учащихся 9–11 классов состоялся 2 февраля. Вариант олимпиады включал три сюжета, по четыре пункта в каждом. Изначально участникам предлагалось по два пункта из каждого сюжета (на них отводилось три часа). Участники, решившие определенное количество пунктов, переводились в другую аудиторию, где им выдавались остальные пункты и дополнительный час времени.

Брошюра содержит все задачи математических соревнований ЮМШ 2012/13 уч. г. и их решения. В качестве дополнения сюда также включены материалы математического праздника и математической карусели для 5–6 классов. Разумеется, многие задачи могут быть решены иначе. Школьнику засчитывалась задача, если он находил хотя бы одно верное решение. Впрочем, наличие у школьника нескольких верных решений не увеличивало его результат.

В этом году олимпиада ЮМШ попала в перечень олимпиад Российского Совета Олимпиад Школьников, и её результаты могут быть учтены при поступлении в вузы.

Наши координаты:

Почтовый адрес: 198504, Старый Петергоф, Университетский пр., дом 28, математико-механический факультет СПбГУ, ЮМШ.

E-mail: mail@yumsh.spbu.ru . Сайт: http://www.yumsh.spbu.ru . Телефон: (812) 573 9732

# Победители олимпиады

## 5 класс

**Дипломы 1 степени:**

| | |
|---|---|
| Лялинов Иван | 295 |
| Малиновский Владимир | 239 |
| Можаев Андрей | 239 |
| Смирнов Олег | 239 |
| Титов Тимофей | 239 |

**Дипломы 2 степени:**

| | |
|---|---|
| Владимиров Артем | 344 |
| Караваев Петр | Гран |
| Карели Мишель | 344 |
| Колчин Максим | 303 |
| Липатов Алексей | 652 |
| Туркин Игорь | 239 |

**Дипломы 3 степени:**

| | |
|---|---|
| Борисик Максим | 603 |
| Герасимов Виктор | 344 |
| Димант Эллина | 344 |
| Литвин Мартин | 307 |
| Марченко Елизавета | 344 |
| Меркулова Маргарита | 239 |
| Огнёв Александр (4 класс) | 307 |
| Павлов Илья | 544 |
| Петрова Анна | 83 |
| Попова Анастасия | 411 |
| Седых Валерий | 426 |
| Слепанчук Артем | 277 |
| Сухотина Александра | 610 |

## 6 класс

**Диплом 1 степени** **не присуждался**

**Дипломы 2 степени:**

| | |
|---|---|
| Анисимов Андрей | 329 |
| Башарин Артём (г. Видное Московской обл.) | |
| Беляков Артём | 598 |
| Гнатюк Дмитрий | 366 |
| Грибов Филипп | (г. Москва) |
| Григорьев Пётр | (г. Москва) |
| Дав Яков | 261 |
| Дмитриев-Лаппо Ярослав | 30 |
| Зайцев Даниил | 38 |
| Карлин Ян | 262 |
| Корчагин Владислав | 526 |
| Лапшин Алексей | 450 |
| Латышев Александр | (г. Москва) |
| Мильшин Владислав | 344 |
| Олейник Иван | 107 |
| Сафонов Иван | 344 |
| Серикова Екатерина | 30 |
| Усачёв Михаил | 292 |
| Ярков Алексей | 116 |

**Дипломы 3 степени:**

| | |
|---|---|
| Айнбунд Ася | 550 |
| Анищенко Анатолий | 64 |
| Артеймов Андрей | 64 |
| Беляков Кирилл | 598 |
| Климчук Никита | 138 |
| Комаров Андрей | 366 |
| Конева Елизавета | 179 |
| Корнейчук Владимир | 292 |
| Лабутина Ксения | 150 |
| Любимов Александр | 261 |
| Пазуха Анастасия | 419 |
| Фёдоров Никита | 64 |
| Филиппов Степан | 610 |
| Цителова Анастасия | 405 |

## 7 класс

**Диплом 1 степени:**

| | |
|---|---|
| Мартынова Ольга | 64 |

**Диплом 2 степени:**

| | |
|---|---|
| Епифанов Владислав | 533 |

**Дипломы 3 степени:**

| | |
|---|---|
| Малышева Мария | 116 |
| Гаврилов Данил | 144 |
| Жуков Матвей | 239 |
| Садикова Екатерина | 526 |
| Селищев Виталий | 526 |
| Александрова Полина | 533 |
| Геравкер Николай | 533 |
| Зайцев Дмитрий | 533 |

## 8 класс

**Дипломы 1 степени:**

| | |
|---|---|
| Гаранин Евгений | (г. Москва) |
| Трескунов Артем | 30 |

**Дипломы 2 степени:**

| | |
|---|---|
| Амиров Фарит | 533 |
| Никифоровская Анна | ФТШ |
| Римский-Корсаков Александр | 533 |
| Шершнёв Иван | 261 |

**Дипломы 3 степени:**

| | |
|---|---|
| Горохов Никита | 56 |
| Грачёва Анастасия | 366 |
| Грудинин Дмитрий | 239 |
| Затепякин Михаил | 533 |

Кузнецов Артем 533
Разумова Дарья 533
Решетова Софья 533
Сундуков Вячеслав 533
Сюрис Аркадий 533
Толстой Александр 533
Швыркова Александра 571
Лобанова Алина 652

## 9 класс

**Диплом 1 степени:**
Макаров Владислав 450
**Дипломы 2 степени:**
Монаков Григорий 533
Жибарев Георгий 533
**Дипломы 3 степени:**
Севастюк Дмитрий 533
Багиров Фарид 533
Лёгенькая Мария 533
Михайловский Владислав 533
Степанов Илья (г. Иркутск)

Крымский Станислав Плюс
Курсанин Денис 533
Никифоров Павел 533
Погонченко Наталья 415
Сафронов Никита 31
Севостьянов Андрей 533
Селезнёв Вадим 426
Стоноженко Кирилл 631
Щеголева Анастасия 533
Щелкунов Евгений 393
Яковлев Владимир 526

## 10 класс

**Диплом 1 степени:** Немилов Михаил 533
**Диплом 2 степени:** Лебедева Дарья 533
**Дипломы 3 степени:**
Боровков Данила 533
Лялинов Илья 533
Могунова Вероника 533

## 11 класс

**Диплом 1 степени:** Струков Георгий 533
**Диплом 2 степени:** Фролов Алексей АГ
**Дипломы 3 степени:**
Горохов Никита 261
Фёдоров Роман ФТШ
Шумахер Эмилия 533
Бобцов Александр 30
Дуванов Владимир 393

# Статистика по задачам

| Класс | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 74 | 79 | 50 | 40 | 28 | 16 | 7 |
| 6 | 108 | 98 | 56 | 53 | 33 | 38 | 1 |
| 7 | 64 | 47 | 41 | 6 | 16 | 1 | 2 |
| 8 | 49 | 23 | 40 | 36 | 10 | 1 | 2 |

| Класс | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 3.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 20 | 4 | 1 | 0 | 15 | 11 | 6 | 3 | 11 | 10 | 3 | 1 |
| 10 | 8 | 23 | 0 | 1 | 12 | 0 | 0 | 0 | 21 | 19 | 9 | 0 |
| 11 | 9 | 4 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 20 | 10 | 4 | 1 |

# Количество решённых задач (статистика по участникам)

| Класс | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 6 | 13 | 12 | 30 | 21 | 11 | |
| 6 | 0 | 19 | 14 | 19 | 24 | 22 | 11 | |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 16 | 19 | 20 | 24 | |
| 8 | 0 | 2 | 4 | 15 | 15 | 10 | 4 | |

| Класс | 11 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 4 | 2 | 3 | 3 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 2 | 7 | 9 |

# Условия задач

## Первый (заочный) тур

### 5–6 классы

**1.** Составьте квадрат 7×7 клеток из пяти таких прямоугольников: 1×4, 2×4, 2×5, 2×6, 3×5.

**2.** Среди трёх Маш, трёх Ань и двух Даш – четыре блондинки и четыре брюнетки. Может ли оказаться так, что у каждой девочки в этой компании есть хотя бы одна тёзка с тем же цветом волос? Не забудьте обосновать свой ответ.

**3.** В доме все комнаты прямоугольные. В одной из комнат в стене последовательно расположены три двери с такими надписями.

Первая дверь: **Эта дверь ведёт в ту же комнату, что и вторая дверь**.
Вторая дверь: **Эта дверь ведёт в комнату, в которую не ведут ни первая, ни третья дверь.**
Третья дверь: **Эта дверь ведёт в ту же комнату, что и первая дверь.**

Ровно одно из этих утверждений ложно. Какое? (Укажите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.)

**4.** На доске написано 100 чисел: 2, 4, 6, ..., 200. За один ход можно поменять местами два числа, если одно из них делится на другое. Можно ли с помощью таких действий переставить эти числа в обратном порядке: 200, 198, 196, ..., 2? Не забудьте обосновать свой ответ.

**5.** У короля есть прямоугольный остров, разбитый на несколько прямоугольных участков, принадлежащих феодалам. В ответ на заданный каждому феодалу вопрос «сколько у Вас соседей?» было дано ровно два вида ответов: «три» и «семь» (участки соседние, если у них есть общий отрезок границы). При каком наименьшем количестве участков такое возможно? Не забудьте обосновать свой ответ.

**6.** Максим сложил два числа. После этого он заменил все цифры буквами (одинаковые цифры – одинаковыми, разные – разными). Получился такой пример: ЗАДАЧА + УДАЧА = РЕШЕНИЕ. Докажите, что Максим где-то ошибся.

**7.** В алфавите племени МАБУ две гласные буквы А и У и две согласные – Б и М. Все слова племени состоят из 13 букв, в которых гласные чередуются с согласными. Слова, которые содержат комбинацию БУ или БАМ, считаются плохими, а слова, содержащие БА или МАМ, – милыми. Каких слов больше – плохих или милых? Не забудьте обосновать свой ответ.

Решения на с. 16

### 7–8 классы

**8.** Пятеро детей водили хоровод вокруг ёлки 30-го и 31-го декабря. Верно ли, что, как бы они ни встали в хоровод 31-го, найдутся двое соседей, которые уже были соседями в хороводе 30-го?

**9.** См. задачу №3.

**10.** См. задачу №6.

**11.** На шахматной доске стоят 5 ладей и несколько коней, причём никакие две фигуры не бьют друг друга. Каково максимально возможное количество коней? (Не забудьте доказать, что оно действительно максимально.)

**12.** [1] Придумайте такую фигуру, что и из 16, и из 18 её экземпляров можно сложить квадрат. Все экземпляры должны быть равными, то есть одинаковыми по форме и размеру.

---

[1] Задача 12 предлагалась только седьмому, а задача 13 – только восьмому классу

**13.** Костя нарисовал треугольник и точно измерил в нём длины трёх сторон и трёх медиан. У него получилось шесть различных чисел. Эти числа он сообщил Саше, не уточняя, какие из них – длины сторон, а какие – длины медиан. Докажите, что Саша сможет определить хотя бы одно из чисел, являющееся длиной стороны.

**14.** Есть 11 трёхзначных чисел. В каждой паре чисел большее число поделили на меньшее с остатком. Все остатки получились отличными от нуля. Докажите, что один из остатков не меньше 10.

**15.** Маша положила на стол несколько отрезков и обнаружила четыре квадрата разных размеров, все стороны которых лежат на этих отрезках. (Пример такого расположения отрезков показан на рис. 1) Докажите, что Маша может переложить отрезки так, чтобы квадратов оказалось шесть (и все разных размеров).

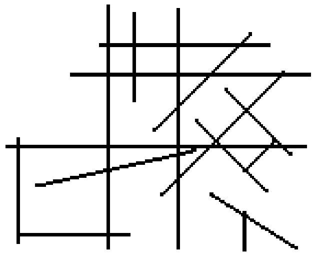

Рисунок 1

Решения на с. 18

## Математический праздник для 5–7 классов

**16.** Пятеро ребят встали по кругу. Они перекидывают друг другу мяч, причем нельзя кидать мяч своим соседям. Известно, что во время игры Боря кидал мяч Грише, Вова – Диме, а Гриша – Вове. Кто стоит рядом с Антоном?

**17.** У малыша Димы на два зуба больше, чем у малышки Юли. У боксера Коли зубов столько же, сколько у Димы и Юли вместе взятых, но вдвое меньше, чем у биолога Вити. Всего на них четверых приходится 64 зуба. Сколько у кого зубов?

**18.** Сколько способов переставить буквы в слове ВАННА, чтобы никакие две одинаковые буквы не стояли рядом?

**19.** На утренней зарядке в понедельник Артём сделал некоторое количество приседаний, после чего решил, что каждый следующий день он будет делать на одно приседание больше. За неделю он сделал 161 приседание. Сколько приседаний Артём сделал в первый день?

**20.** Фишка стоит в левом верхнем углу доски 4×4. За один ход фишку можно сдвинуть на одну клетку либо вправо, либо вниз, либо по диагонали влево-вверх. Как довести её в правый нижний угол, пройдя все клетки доски по одному разу? Нарисуйте путь.

**21.** В ряд встали девять человек, некоторые из которых (рыцари) всегда говорят правду, а остальные (лжецы) всегда обманывают. Каждый сказал: «Справа от меня лжецов больше, чем слева рыцарей». Сколько среди них лжецов?

**22.** Расставьте наименьшее количество знаков арифметических действий в строчке 1 1 2 2 3 3 так, чтобы после выполнения этих действий результат был равен 34.

**23.** Найти наименьшее натуральное число, в названии которого имеются гласные А, Е, И, О.

**24.** На доске написано число 2012. Каждую минуту из него либо вычитают 20, либо делят на три (но только если число делится без остатка). В какой-то момент число на доске стало меньше 10. Каким могло быть это число? Приведите все возможные варианты.

**25.** Расставьте числа от 1, 2, 3, ..., 11 в клетках фигуры (рис. 2) так, чтобы в любых двух соседних по стороне клеточках сумма чисел делилась бы на 3 или на 4.

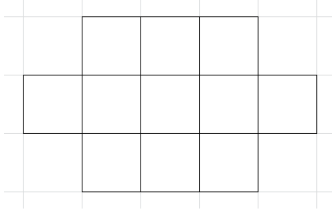

Рисунок 2

**26.** На доске были написаны два верных равенства, после чего хулиган Ваня заменил одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные – разными. Получились такие записи: А + Б = ВВ, А × АГ = ВВВ. Найдите А, Б, В, Г.

**27.** Женя загадал два числа, умножил каждое на два, после чего записал исходные и удвоенные числа в каком-то порядке. Получилось 174628734. Найдите исходные числа.

Решения на с. 19

# Математическая карусель

## 5–6 классы

**28.** Четыре царевны загадали по двузначному числу, а Иван загадал четырёхзначное число. Когда они написали свои числа в ряд в каком-то порядке, получилось 132040530321. Найдите число Ивана.

**29.** В классе 28 человек. Преподаватель физкультуры выяснил, что умеющих плавать девочек в 4 раза больше, чем не умеющих плавать мальчиков, а мальчиков, умеющих плавать, в 5 раз больше, чем не умеющих плавать девочек. Сколько в классе девочек?

**30.** Квадрат 300×300 разбит красными линиями на «вертикальные» прямоугольники 3×2, а синими линиями – на «горизонтальные» прямоугольники 2×3. Сколько получится отдельных квадратиков 1×1, если провести разрезы по всем линиям?

**31.** Из доски 8×8 Миша вырезал по клеткам прямоугольник, а Ксюша разрезала его (тоже по клеткам) на 9 фигурок, и все фигурки оказались разной площади. Какова минимально возможная площадь Мишиного прямоугольника?

**32.** Астролог считает год удачным, если сумма крайних цифр в его номере равна сумме средних цифр. Сколько удачных лет в XXI веке?

**33.** Кошке Марусе нужно было покормить и помыть 15 котят. Маруся покормила 8 котят и помыла 9 котят. После этого выяснилось, что ровно 5 котят покормлены, но не помыты. Сколько котят не покормлены и не помыты?

**34.** На кольцевой трассе длиной 100 км стоят километровые столбы с номерами от 0 до 99. Два автомобиля, стартовав от столба с номером 83 в разные стороны, первый раз встретились у столба 8. После этого более медленный автомобиль поехал в обратную сторону, а быстрый продолжил движение. У какого столба автомобили встретятся в следующий раз? Скорость каждого из автомобилей постоянна.

**35.** Сколько существует трёхзначных чисел, у которых произведение цифр меньше трёх?

**36.** Напишите наименьшее чётное десятизначное число с суммой цифр 52.

**37.** В углу клетчатой доски 7×7 стоит слон-скакун. За ход слон-скакун может прыгнуть через одну клетку по диагонали. На каком наибольшем количестве клеток может побывать слон-скакун?

**38.** Назовём числа 3 и 13 счастливыми. Найдите наибольшее натуральное число, которое не представимо в виде суммы нескольких (не обязательно различных) счастливых чисел.

**39.** В коробке 10 белых, 20 синих, 30 чёрных и 40 красных шариков. Миша наугад вытаскивает их один за другим до тех пор, пока у него не окажется разное количество шариков каждого цвета. Сколько шариков ему придётся вытащить в худшем случае?

**40.** Гриша из всех цифр составил десятизначное нечётное число. При этом сумма любых двух соседних цифр меньше десяти. Какое число составил Гриша?

**41.** Катя выписала на доске все чётные числа от 2 до 200. Какая цифра была выписана наибольшее число раз?

**42.** На острове есть два племени – рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут). Как-то собралась компания из 25 островитян. У каждого спросили, сколько среди них лжецов. Два человека сказали «два», 4 человека – «меньше четырёх», 6 человек – «меньше шести», 13 человек – «меньше тринадцати». Так сколько среди них лжецов, если известно, что в компании есть представители обоих племён?

**43.** Петя сосчитал произведения 1·2, 2·3, 3·4, …, 998·999, 999·1000. У скольких из них последние две цифры – нули?

Решения на с. 19

## 9–11 классы

**44.** В последовательности $x$, $y$, $z$, $t$, 10, $u$, $v$, ... каждый член, начиная с третьего, равен произведению двух предыдущих членов. Найдите произведение первых шести членов этой последовательности.

**45.** На каждой из двух параллельных прямых отметили по десять точек. Сколько существует невырожденных треугольников, все вершины которых лежат в отмеченных точках?

**46.** Михаил вычел из суммы $N$ первых трёхзначных чисел сумму $N$ самых больших двузначных чисел. Для какого наименьшего $N$ разность, полученная Михаилом, является четырёхзначным числом?

**47.** Найдите количество натуральных чисел, меньших 1000, квадраты которых оканчиваются двумя одинаковыми цифрами.

**48.** Вычислите (в градусах) наименьший угол треугольника, в котором медиана и высота, проведённые из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части.

**49.** Дробь $\frac{100!}{12^{50}}$ сократили, и получили несократимую дробь $\frac{m}{n}$. Найдите $n$.

**50.** Город имеет форму квадрата со стороной 5 км. Улицы разделяют его на кварталы со стороной 200 м. Какую наибольшую площадь (в км$^2$) можно заключить внутрь замкнутого маршрута длиной 10 км по улицам этого города?

**51.** Точки $K$ и $L$ делят диагональ $AC$ прямоугольника $ABCD$ на три равных части. Найдите отношение площади прямоугольника $ABCD$ к площади четырёхугольника $KBLD$.

**52.** Найдите хотя бы одно трёхзначное число, равное сумме факториалов своих цифр.

**53.** Коля сосчитал количество способов выбрать из чисел 1, 2, …, 100 четыре (не обязательно различных) числа так, чтобы сумма выбранных им чисел делилась на 5, а Миша – количество способов выбрать из чисел 1, 2, …, 100 четыре (не обязательно различных) числа так, чтобы произведение выбранных им чисел делилось на 5. Найдите отношение результата Миши к результату Коли. Способы, отличающиеся лишь порядком чисел, считаются разными.

**54.** Сколько решений имеет уравнение $|sinx| = \frac{2x}{2013\pi}$?

**55.** Сколько решений на отрезке [1;10] имеет уравнение $2x = [5x] – [3x]$? (Здесь $[a]$ – целая часть числа $a$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $a$).

**56.** Сколько среди коэффициентов многочлена $(x+1)^{100}$ нечётных?

**57.** Известно, что $a$, $b$, $c$ – целые числа, $a+b+c = 15$, и уравнение $(x–a)(x–b)(x–c) – 3 = 0$ имеет целый корень. Найдите этот корень.

**58.** Найдите отношение площади правильного шестиугольника к площади правильного треугольника, имеющего с ним общую описанную окружность.

Решения на с. 20

# Заключительный тур

## 5 класс

**59.** У Кнопочки есть полоска из 20 клеток и два дырокола. Каждый дырокол за одно нажатие прокалывает две клетки, причем у первого дырокола между дырками будет две нетронутые клетки, а у второго – три. Как Кнопочке за 10 нажатий проколоть всю полоску?

**60.** Диана, Кирилл и Афанасий задумали по трехзначному числу. Могло ли оказаться так, что сумма числа Афанасия с числом Дианы равна 600, а сумма числа Кирилла с числом Дианы равна 1500?

**61.** Соедините все 7 точек, показанных на рис. 3, тремя отрезками, не отрывая карандаша от бумаги. Проводить карандаш дважды вдоль одной линии нельзя.

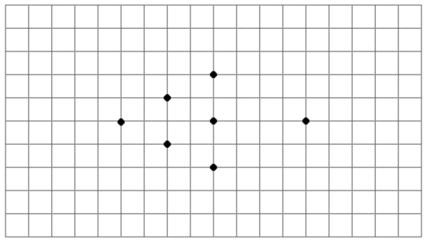

Рисунок 3

**62.** На математический кружок пришли три длинноволосых ребёнка. Их фамилии – Кубанец, Чиковани и Никитина, имена – Саша, Женя и Дима. Учитель знает об этом, но на взгляд не может определить, кто из них мальчик, а кто девочка. Каждый из детей назвал своё имя и фамилию, причём учителю известно, что мальчики называют и то и другое неверно, а девочки правильно. Может ли учитель гарантированно определить по ответам детей, сколько среди них мальчиков? (Кубанец и Чиковани могут быть как мальчиками, так и девочками, Саша и Женя тоже).

**63.** Чтобы мирно сосуществовать, собаки и кошки в нашем городе давно установили три правила:

1) В одном дворе не может быть больше 6 животных одновременно.
2) Если во дворе есть собака, то в нём не может быть больше трёх кошек.
3) Во дворе, в котором есть кошка, не может быть больше двух собак.

В город прибыли 100 новых животных: 49 кошек и 51 собака. Можно ли их поселить в 17 пустых дворах?

**64.** В министерстве работает 100 чиновников. Известно, что если выбрать любых 9 из них, среди них обязательно найдется 4 родственника. Докажите, что каких бы 11 чиновников этого министерства мы ни выбрали, среди них обязательно найдется 5 родственников.

**65.** Игра «Флатландские шашки[2]» ведётся на поле 1×21. Вначале на десяти левых клетках стоят 10 белых шашек, а на десяти правых клетках – 10 черных шашек. Средняя клетка пуста. Цель – обменять местами черные и белые шашки. За один ход можно сместить любую шашку влево или вправо на одну клетку (если она свободна) или перепрыгнуть влево или вправо через шашку другого цвета (если клетка за ней свободна). Ходы делаются не обязательно по очереди. Можно ли достичь цели быстрее, чем за 120 ходов?

Решения на с. 21

## 6 класс

**66.** В стране *X* всего девять городов, расположенных так, как показано на рис. 4. Король хочет соединить некоторые из них прямыми дорогами так, чтобы из каждого города выходило ровно по четыре дороги, и дороги не пересекались.

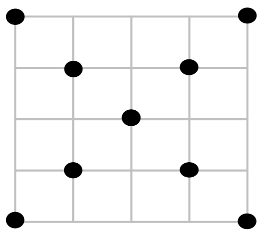

Рисунок 4

Помогите ему!

**67.** Известно, что бабка весит больше внучки, внучка больше жучки, жучка больше кошки, а кошка с жучкой вместе – столько же, сколько бабка. Каждый из них весит целое число мышек. Могут ли они все вместе (включая мышку) весить меньше 15 мышек?

**68.** Отец выдал Алексу и Джеймсу 100 задач. Тот, кто решает задачу первым, получает за неё 4 очка, вторым – 1 очко. В результате каждый из них решил по 60 задач (не обязательно одинаковых). Могли ли они набрать в сумме 313 очков?

[2] Флатландия – выдуманный английским писателем XIX века Эдвином Эбботтом двумерный (плоский) мир. Если бы его обитатели играли в шашки, то игровая доска наверняка была бы одномерной.

**69.** У Кнопочки есть полоска из 100 клеток и два дырокола. Каждый дырокол за одно нажатие дырявит две клетки, причём у первого дырокола между дырками будет шесть нетронутых клеток, а у второго – семь. Как Кнопочке за 50 нажатий продырявить все клетки полоски? (Ср. с задачей №59)

**70.** Есть доска 9×9 клеток. В каждую клетку поставили число 0, 1 или 2 так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма была больше четырёх. Докажите, что сумма всех чисел на доске не меньше 89.

**71.** Мама выдала Ванечке двузначное число. Ванечка сложил в столбик это число с ним же, после чего проделал то же самое с полученным результатом, и так 11 раз. Когда мама стала проверять его вычисления, выяснилось, что Ванечка при сложении двойки с двойкой получал всегда вместо четырёх пять (или 6, если там был ещё перенос). В итоге у него получилось число, которое оканчивается ровно на один ноль. Каким могло быть исходное число?

**72.** Круг разбит на 100 секторов. Мирза и Егор по очереди заполняют сектора (в произвольном порядке) натуральными числами (первым ходит Мирза). Когда все сектора заполнены, Мирза пишет на доску ещё одно натуральное число, после чего Егор режет круг на две половинки (по 50 секторов). Если сумма чисел в одной из них оканчивается на те же две цифры, что и число на доске, то побеждает Егор, иначе побеждает Мирза. Кто победит при правильной игре?

Решения на с. 22

## 7 класс

**73.** Многоугольник называется хорошим, если хотя бы две его стороны равны. Разрежьте какой-нибудь треугольник с тремя разными сторонами на хороший треугольник и хороший четырёхугольник.

**74.** Вася познакомился с четырьмя девочками. Он знает, что их зовут Аня, Белла, Варя, Галя, но ещё не знает, кого как. Он может спрашивать у одной девочки, как зовут другую девочку. Вася знает, что Аня всегда врёт, и про Беллу всегда врут, а в остальных случаях девочки говорят правду. Сможет ли он выяснить, кто Аня?

**75.** Каждый год на день рождения Дядя Фёдор получает число рублей, равное произведению возрастов его мамы и папы. В этом году он получил сколько-то купюр по 100 рублей и ещё 22 рубля монетами. Докажите, что через пять лет подаренная сумма снова будет оканчиваться на 2.

**76.** Клетчатый квадрат со стороной 101 покрашен в белый и чёрный цвета «концентрически». (На рис. 5 показана такая раскраска для квадрата со стороной 11.) Разрешается взять квадрат с чётной стороной, примыкающий к любому из углов, и изменить в нём цвет каждой клетки на противоположный. Можно ли такими действиями перекрасить всю доску в один цвет?

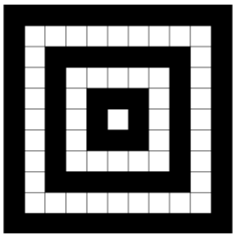

Рисунок 5

**77.** На экзамене профессор раздаст 30 студентам листки с вопросом: «Какой любимый цвет профессора?» и пятью вариантами ответа. На одном из листков в уголке написан правильный ответ, но никто не знает, кому он достанется. В конце экзамена профессор собирает эти листки и объявляет, сколько раз был выбран каждый цвет. Если какой-то цвет не встретился, профессор ставит всем двойки. Каждый студент, выходя из аудитории, говорит на ухо профессору его любимый цвет, и если он угадывает, ему ставят пять. Как студентам договориться перед экзаменом так, чтобы все получили пятёрки?

**78.** Принимая пациента, доктор пишет в специальный журнал четыре числа – его рост, вес, сумму роста и веса и разность между ростом и весом. Однажды после приема 50 детей он обнаружил, что в его журнале выписаны все числа от 1 до 200. Докажите, что где-то доктор ошибся.

**79.** Дан клетчатый прямоугольник 3×2013. В центре каждой клетки стоит по точке. Можно ли нарисовать 2013 непересекающихся треугольников с вершинами в этих точках?

Решения на с. 23

## 8 класс

**80.** На день рождения родители дарят Дяде Фёдору сумму денег, равную произведению возраста папы на возраст мамы. Могло ли случиться, что в 2010 и 2011 годах полученные им суммы кончались на одну и ту же цифру, а сумма, полученная в 2012 году, делилась на 10? (Ср. с задачей №75)

**81.** В треугольнике $ABC$ $AB = BC$. На лучах $CA$, $AB$ и $BC$ отмечены соответственно точки $D$, $E$ и $F$ так, что $AD = AC$, $BE = BA$, $CF = CB$. Найдите $\angle ADB + \angle BEC + \angle CFA$.

**82.** Маша упражняется в перекрашивании шахматной доски. За один раз она может изменить цвет каждой клетки в любом прямоугольнике, прилегающем к углу доски. Получится ли у неё с помощью таких операций перекрасить всю доску в один цвет? (Ср. с задачей №76.)

**83.** В куче лежит $N$ камней, $N>3$. Двое играют в игру. Первый игрок забирает из кучи один камень. Каждым следующим ходом можно забрать либо ровно на один камень больше, либо ровно на один меньше, чем только что взял соперник, но не менее одного камня. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл его соперник?

**84.** 40 детей стоят по кругу. Ребёнок называется *дылдой*, если он выше двух следующих за ним по часовой стрелке, и *мелким*, если он ниже обоих предшествующих ему по часовой стрелке. (Ребёнок может быть и мелким, и дылдой одновременно.) Известно, что число дылд не меньше 30. Докажите, что мелких не меньше 20.

**85.** Из чисел от 1 до 48 половину покрасили в синий цвет, а остальные в красный. Может ли произведение красных чисел оказаться степенью суммы синих?

**86.** См. задачу №79.

Решения на с. 24

## 9 класс

**87.** Монетный двор отчеканил 101 монету. С виду они одинаковые, но весить могут по-разному. Известно, что монет какого-то веса среди отчеканенных больше половины, и они-то и названы настоящими. У кассира есть чашечные весы без гирь, и он хочет найти хотя бы одну настоящую монету.

**87.1.** В этом пункте считается, что настоящих монет ровно 51 и они более тяжелые, а 50 оставшихся также весят одинаково. Как найти хотя бы одну настоящую монету за 50 взвешиваний?

**87.2.** Как найти настоящую монету за 100 взвешиваний? (Фальшивые монеты могут весить по-разному, количество настоящих монет неизвестно.)

**87.3.** Как найти настоящую монету за 100 взвешиваний, взвесив каждую монету не более 2 раз?

**87.4.** В этом пункте уже не гарантируется, что монет какого-то веса больше половины. Как за 150 взвешиваний найти хотя бы одну монету из «большинства», если оно есть, или определить, что этого большинства нет.

**88.** На плоскости нарисовали три окружности, любые две из которых пересекаются в двух точках. Потом отметили все точки пересечения, а сами окружности стёрли.

**88.1.** Пусть отмеченными оказались 6 точек. Могут ли они быть вершинами правильного шестиугольника?

**88.2.** Пусть отмечены 4 точки, и они лежат в вершинах ромба с углами 60° и 120°. Радиус меньшей окружности равен 1. Чему равны радиусы двух остальных?

**88.3.** Пусть отмечено 6 точек. Могут ли им соответствовать различные наборы окружностей?

**88.4.** Пусть окружностей было не три, а 100, а точек отмечено 9900. Докажите, что исходные окружности восстанавливаются однозначно.

**89.** У Миши было уравнение № 1 с одной неизвестной $x$. Он заменил всюду $x$ на $\frac{3x+1}{2x+1}$ и получил уравнение № 2.

**89.1.** Могло ли быть так, что уравнение № 1 квадратное с непустым множеством решений, а у уравнения № 2 решений нет?

**89.2.** Уравнение № 1 квадратное, имеет два вещественных корня. Уравнение № 2 имеет те же два корня. Найдите эти уравнения.

**89.3.** Могут ли у этих уравнений быть одинаковые множества корней из трёх элементов? (Уравнения могут быть любыми, например, тригонометрическими.)

**89.4.** Рассмотрим другую замену: $x$ заменяется на $\frac{x^4+x^2+2}{x^2+x+1}$. У уравнений совпали множества корней. Сколько корней может быть?

Решения на с. 24

## 10 класс

**90.** Последовательности $(x_n)$ и $(y_n)$ заданы условиями $x_1 = 1$; $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n}$; $y_1 = 2$; $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{x_n}$.

**90.1.** Докажите, что последовательность $(x_n)$ не ограничена.

**90.2.** Докажите, что $y_{100} > 14$.

**90.3.** Пусть $q_n$ – знаменатель $y_n$. Докажите, что $q_n > 2^{2^{n-2}-1}$.

**90.4.** Докажите, что $y_{100} > 20$.

**91.**

**91.1.** Компьютер загадал квадратный трехчлен $F = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, а Вася может называть две точки (не обязательно различные), после чего компьютер сообщает ему произведение значений $F$ в этих точках. Как Васе всего за три вопроса отгадать $F$?

**91.2.** Теперь компьютер загадал многочлен степени $n$ с положительным старшим коэффициентом, а Вася называет n точек (не обязательно различных), после чего компьютер сообщает ему произведение значений загаданного многочлена в этих точках. За какое наименьшее число вопросов Вася заведомо сможет отгадать многочлен?

**91.3.** Компьютер снова загадал многочлен степени $n$ с положительным старшим коэффициентом, а Вася называет две точки, после чего компьютер сообщает ему произведение значений загаданного многочлена в этих двух точках. За какое наименьшее число вопросов Вася заведомо сможет отгадать многочлен?

**91.4.** Компьютер загадал квадратный трёхчлен $F$, а Вася, пытаясь его отгадать, называет набор из 100 различных чисел (каждое не больше $10^{1000}$). После этого компьютер выбирает из них 15, сообщает Васе произведение значений $F$ в этих 15 точках и информирует, какие именно 15 точек он выбрал. Сможет ли Вася с помощью таких вопросов отгадать $F$?

**92.**

**92.1.** В треугольнике $ABC$ точка $M$ лежит на стороне $AC$, а точка $N$ – на стороне $BC$. Могут ли отрезки $AN$ и $BM$ разбить треугольник $ABC$ на четыре равных по площади части?

**92.2.** В треугольнике $ABC$ точки $N$ и $M$ лежат на стороне $BC$, а точки $K$ и $L$ – на стороне $AC$. Могут ли 9 частей, на которые треугольник $ABC$ разбит отрезками $AN$, $AM$, $BK$, $BL$, иметь равные площади?

**92.3.** В треугольнике $ABC$ точка $M$ лежит на стороне $AB$, точка $K$ – на $BC$, а точка $L$ – на $AC$. На сколько частей отрезки $AK$, $BL$, $CM$ разбили треугольник $ABC$, если площади всех полученных частей равны?

**92.4.** В четырёхугольнике $ABCD$ точка $K$ лежит на стороне $BC$, $L$ – на стороне $CD$, $M$ – на $AD$, $N$ – на $AB$. Могут ли все части, на которые $ABCD$ разбили отрезки $AK$, $BL$, $CM$, $DN$, иметь равные площади?

Решения на с. 27

## 11 класс

**93.** См. сюжет № 90.

**94.** См. сюжет № 91.

**95.** Пусть дан шаблон – выпуклая фигура[3], про которую известно следующее: она помещается внутри единичного квадрата, содержит три его вершины и симметрична относительно одной из его диагоналей (рис. 6). Расположим этот шаблон внутри квадрата 4 раза, «прислоняя» его к каждому углу (рис. 7). В результате квадрат разделится на части, как четырёхлепестковый цветок: центр покрыт всеми четырьмя копиями шаблона, «лепестки» (закрашены) – тремя, а оставшаяся часть – двумя. В следующих задачах под «площадью лепестков» будет пониматься суммарная площадь части, покрытой ровно тремя копиями шаблона.

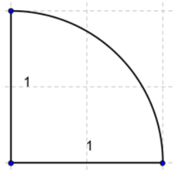


Рисунок 6

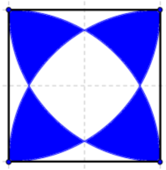

Рисунок 7

**95.1.** Докажите, что при площади шаблона 0,9 максимально возможная площадь лепестков равна 0,4.

**95.2.** Пусть шаблон – четверть круга. Докажите, что площадь лепестков меньше $\pi + 2\sqrt{3} - 6$.

**95.3.** Пусть граница шаблона (содержащего вершины (0; 0), (1; 0) и (0; 1)) проходит через точку (0,5; 0,75). Какова максимально возможная площадь лепестков?

**95.4.** Какова максимально возможная площадь лепестков для произвольного выпуклого шаблона?

Решения на с. 29

# Об авторах

Разумеется, не все использованные в олимпиаде задачи полностью новы и оригинальны. Ниже мы указываем фамилии авторов, предложивших задачи для олимпиады. Задачи совместного авторства выделены *курсивом*. Окончательные формулировки большинства задач – результат совместного творчества членов методической комиссии олимпиады.

[3] Фигура называется выпуклой, если для любых двух точек, принадлежащих фигуре, соединяющий их отрезок полностью принадлежит ей.

Антипов М.А. — *91*, 89, 84, 72, 60, *43*, 39, 30, 14, *5*
Атаманова М.М. — 82, 77, 76
Волчёнков С.В. — 83
Жюри — 58, 54, 52, 51, 50, 49, 48, 47, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 1
Зильберборд И.М. — 91, 53
Кноп К.А. — 90, *87*, 80, 78, 75, 67, 65, 61, 57, 56, 55, 46, 45, 44, *32*, 13, *12*
Косовский Н.Н. — 81
Куликов А.Б. — *87*
Маслова М.В. — 71, 70, 69, 68, 66, 59, *43*, 42, 41, 40, 38, 37, 36, 35, 33, 29, 28, 7, 6, *5*, 4, 3, 2
Порецкий А.М. — *88*, *12*
Самойлов В.С. — 92, 79, *63*, *15*, 8
Самойлова О.Е. — *63*
Солынин А.А. — 74, 62
Теслер А.А. — 95, *88*, 85, 73, 34, *32*, 31, *15*, 11, 8
Фирдман И.А. — 64

# Указания, ответы и решения

## Первый (заочный тур)

### 5–6 класс

**1.** Решение показано на рис. 8.

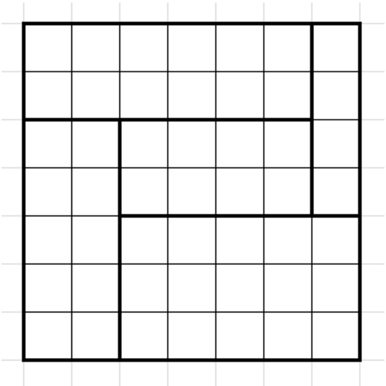

Рисунок 8

**2.** Не может. У всех Маш должны быть волосы одного цвета (иначе для одной из них не найдётся тёзка того же цвета), и у всех Ань тоже. Допустим, Маши – блондинки. Тогда Ани должны быть брюнетками (так как блондинка осталась только одна). Поэтому две Даши – блондинка и брюнетка, но тогда ни у одной из них нет тезки с тем же цветом волос.

**3.** Второе высказывание ложно. Первое и второе высказывание противоречат друг другу (говоря о том, ведут ли первая и вторая дверь в одну комнату). Значит, среди них точно есть ложное. Поэтому третье высказывание – истинное. Но раз первая и третья двери ведут в одну комнату, то и вторая дверь ведёт туда же, иначе комната не будет прямоугольной. Поэтому все три двери ведут в одну комнату (т.е. ложно второе высказывание).

**4.** Можно. Все числа делятся на 2, поэтому каждое можно поменять местами с двойкой. Будем последовательно менять двойку с 200, 4, 198, 6, 196, 8 и т. д. Получим:

| | |
|---|---|
| Исходный ряд | 2,4,6,8,……….194,196,198,200 |
| $2 \leftrightarrow 200$ | 200, 4,6,8…….194,196,198,2 |
| $2 \leftrightarrow 4$ | 200,2,6,8,……194,196,198,4 |
| $2 \leftrightarrow 198$ | 200,198,6,8…….194,196,2,4 |
| $2 \leftrightarrow 6$ | 200,198,2,8……..194,196,6,4 |
| $2 \leftrightarrow 196$ | 200,198,196,8………194,2,6,4 |
| $2 \leftrightarrow 8$ | 200,198,196,2…………194,8,6,4 |
| $2 \leftrightarrow 194$ | 200,198,196,194………..2,8,6,4 |

В конце все числа, кроме двойки, окажутся на нужных местах, а 2 будет в центре. Затем можно последовательно менять её местами с правыми соседями, смещая тем самым вправо до конца строки.

**5.** Если участок одного из феодалов граничит с семью другими, значит, участков минимум 8 (этот и 7 соседних). Пример расположения 8 участков, удовлетворяющих условиям, приведён на рис. 9.

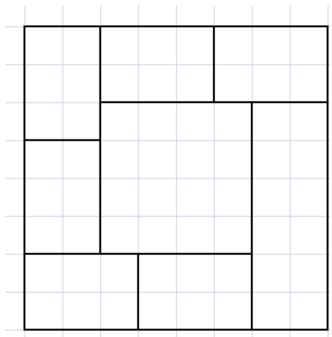

Рисунок 9

**6.** 1) Заметим, что З = 9, Р = 1, Е = 0, иначе разность РЕШЕНИЕ − ЗАДАЧА превышает 100000 и не может равняться пятизначному числу УДАЧА.

2) В разряде единиц А+А = Е или А+А = Е+10. Так как Е = 0, то А = 0 или 5; но А ≠ Е, поэтому А = 5.

3) В разряде сотен при сложении А+А (т.е. 5+5) получается Н; значит, Н = 0 или (при переносе из разряда десятков) Н = 1. Но обе этих цифры уже заняты буквами Р и Е.

*Замечание*. Многие участники пытались рассуждать так: «в последнем разряде А + А = Е, а в четвёртом с конца Д + Д = Е, одно противоречит другому». Это неверно: например, могло бы быть

А = 2, Д = 7, Е = 4. Это рассуждение можно довести до верного решения, но для этого надо использовать то, что Е=0 и А=5. Тогда получается, что Д+Д (или Д+Д+1) =0 (или 10), откуда Д = 0 или Д = 5, но оба этих варианта заняты буквами Е и А.

**7.** Выкинем плохие милые слова, т.к. от них не зависит, каких слов больше – милых или плохих. Останется сравнить количества плохих немилых и милых неплохих. Для этого мы предложим два различных способа

*Способ 1 (подсчет)* Сосчитаем милые неплохие слова. Заметим, что если в таком слове есть Б, то после неё может идти только АБАБА… (иначе получим БУ или БАМ). Тем самым, мы можем разбить милое неплохое слово на два блока – блок М: *М*М*М*М… (звёздочка означает любую из двух гласных букв) и блок Б: БАБАБА...При этом какого-то из этих блоков может и не быть.

Имеется $2^k$ вариантов блока М, в котором ровно $k$ гласных (т.к. каждая из гласных – либо А, либо У).

Пусть блок Б начинается с $k$-го места. Если $k$ чётно, то в предшествующем блоке М ровно $k/2$ гласных (т.е. для него $2^{k/2}$ вариантов), а если нечётно, – то $(k-1)/2$ гласных. Сложим количество вариантов для $1 \le k \le 13$: 1 + 2 + 2 + 4 +4 + 8+ 8 +... 26 + 26 = 253. Вычтем два слова МУМУМУМУМУМ[У/А]Б в которых после Б нет гласной, останется 251. Если же блока Б нет, то число вариантов равно $2^7-4=124$, если слово начинается с гласной, и $2^6-4=63$, если слово начинается с М. Итого: 251 + 124 + 63= 438.

Теперь докажем, что плохих немилых слов больше.

Количество плохих слов вида [Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М] равно $2^7 - 2$ (т.к. не подходят только МУМУ...МУ[Б/М]). Если мы заменим в любом из шести мест *У* на МАБ, получится $2^5$ [выбор остальных согласных]×6 [выбор места]−1 (т.к. не подходит только МУ...МУМАБ). Количество плохих слов вида [А/У][Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У[Б/М]У равно $2^7-2$ (т.к. не подходят только слова [АУ]МУМУ...МУ). Мы уже получили 126 + 191 + 126 = 443 > 438.

*Способ 2 (соответствие)* Как и при подсчёте, каждое милое неплохое слово можно разбить на два блока – блок М: *М*М*М*М… и блок Б: БАБАБА...(какого-то из этих блоков может и не быть). Теперь поставим в пару к каждому милому неплохому слову плохое немилое слово. Для этого преобразуем милое неплохое слово так:

1. В блоке М все МА заменим на БУ.

2. В блоке Б все БА, кроме первого, заменим на БУ, а первое БА – на МА.

Примеры :

МАМУМУМУМАБАБ → БУМУМУМУБУМАБ

МАМУМУМУМАМАБ → БУМУМУМУБУБУБ

МАМУМУМУМАМАМ → БУМУМУМУБУБУМ

АМУМУМУМАМАМА → АМУМУМУБУБУБУ

АМУМУМУМАМАБА → АМУМУМУБУБУМА

АМУМУМУМАБАБА → АМУМУМУБУМАБУ

После этого преобразования слово перестало быть милым, т.к. буква А – либо первая в слове, либо перед блоком Б: МАБУБУ…, то есть нет ни БА, ни МАМ. Кроме того, для разных милых неплохих слов получаются разные пары. Внутри блоков М и Б замена однозначна, а начало блока Б в преобразованном слове определяется по сочетанию МА (если блок Б состоял только из одной буквы Б, то она была последней буквой в исходном слове, а наше преобразование не изменяет буквы Б и М, стоящие на последнем месте).

Теперь разберёмся, в каких ситуациях парные слова оказались плохими. Если в исходном слове был слог МА, то он превратился в БУ, что сделало слово плохим. Если слога МА не было, то был слог БА (т.к. слово было милым). Если блок Б состоял хотя бы из четырёх букв, то БАБА… перешло в

МАБУ…(плохое). Т.е. плохими стали все милые слова, кроме трёх: УМУМУМУМУБА, АМУМУМУМУБА, МУМУМУМУБАБ.

Но количество плохих немилых слов, которые не получились таким образом, больше трёх. Например: АБУМАБУМАБУМУ, УБУМАБУМАБУМУ, МАБУМАБУМАБУМ, МАБУМАБУМАБУБ. Это означает, что плохих немилых слов больше.

## 7–8 классы

**8.** Нет, неверно. Если 30-го декабря порядок детей был таким: 12345, то 31-го он может быть, например, 14253 (см. рис. 10).

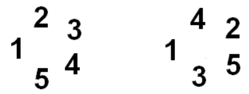

Рисунок 10

**9.** См. решение задачи №3.

**10.** См. решение задачи №6.

**11.** Пять ладей, не бьющих друг друга, занимают пять горизонталей и пять вертикалей. Все клетки, не побитые ладьями, находятся на пересечении трёх оставшихся вертикалей и трёх оставшихся горизонталей, поэтому таких клеток $3 \cdot 3 = 9$. Значит, коней не больше девяти. Примеры расстановки 9 коней приведены на рис. 11.

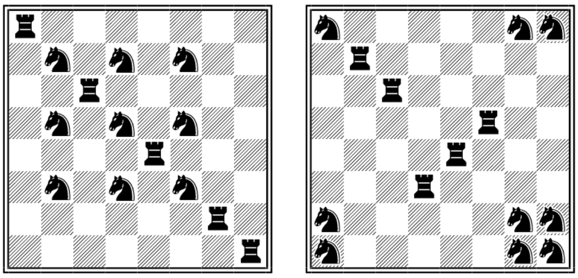
Рисунок 11

**12.** Эта фигура — равнобедренный прямоугольный треугольник. Заметим, что и из двух, и из четырёх таких треугольников можно сделать квадраты, а из них – собрать квадраты с нужным количеством фигур (рис. 12).

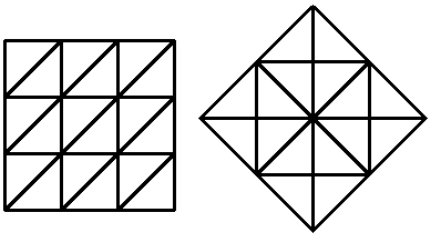
Рисунок 12

**13.** Длиной стороны будет наибольшее из шести названных чисел. Действительно, медиана не может быть наибольшей, поскольку она короче хотя бы одной из двух сторон, между которыми проходит. Это следует, например, из теоремы о том, что против большей стороны в треугольнике лежит больший угол (рис. 13). Действительно, один из углов $AMB$ и $BMC$ не меньше 90°; пусть, например, это угол $AMB$, тогда он наибольший в $\Delta AMB$, поэтому $AB > AM$.

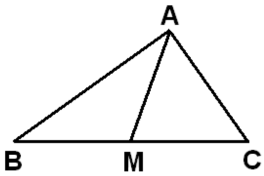

Рисунок 13

**14.** Пусть $x$ — наименьшее из чисел набора. Поделим остальные 10 чисел на $x$ с остатком. Поскольку различных остатков всего девять (от 1 до 9), а чисел десять, то какие-то два остатка равны. Иначе говоря, в наборе есть два числа $A = ax+r$ и $B=bx+r$, $a < b$.

Поделим $B$ на $A$ с остатком: $B = kA+s$, или $bx+r = k(ax+r)+s$, где $r$ и $s$ от 1 до 9 (остатки от деления на $x$), и $a$, $k$ и $b$ – тоже от 1 до 9 (неполные частные при делении одного трёхзначного числа на другое, меньшее). Получим $(b - ka)x = (k-1)r+s$. Это невозможно, поскольку его правая часть больше нуля (т.к. $k-1 \geq 0$, $s > 0$) и не больше $8{\cdot}9+9 = 81$, а левая часть делится на трёхзначное число $x$ (то есть либо 0, либо не меньше 100).

**15.** Докажем сначала, что для составления четырёх разных квадратов требуется не меньше 8 отрезков. Можно считать, что все отрезки параллельны сторонам одного квадрата (т.е. «вертикальны или горизонтальны»). Действительно, если есть два квадрата с непараллельными сторонами, то все их стороны образованы различными отрезками, то есть уже требуется 8 отрезков. Если же отрезки, не параллельные сторонам какого-то квадрата, не участвуют в образовании других квадратов, то их можно убрать, уменьшив общее число отрезков.

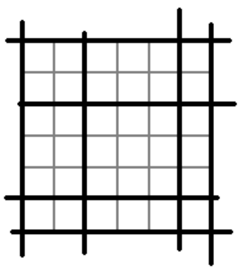
Рисунок 14

Пусть отрезков меньше 8, тогда отрезков какого-то из направлений (вертикальных или горизонтальных) меньше 4. Пусть, например, горизонтальных отрезков всего три, и они лежат на прямых $p$, $q$, $r$. Тогда есть всего три различных значения, которым может равняться сторона квадрата: расстояние между $p$ и $q$, расстояние между $p$ и $r$ и расстояние между $q$ и $r$. Однако из условия известно, что имеются четыре квадрата разных размеров. Если горизонтальных отрезков меньше трёх, то это доказательство тем более проходит.

Итак, отрезков не менее восьми. Восемь отрезков переложим так, как показано на рис. 14 (в качестве «одной клетки» выбрана длина, не превосходящая 1/6 длины самого короткого отрезка). На этом рисунке есть квадраты шести различных размеров (со стороной от 1 до 6). Если изначально отрезков больше 8, то «лишние» можно располагать произвольно.

## Математический праздник

**16.** Ответ: Гриша и Вова.

**17.** Ответ: у Димы – 9, у Юли – 7, у Коли – 16, у Вити – 32 зуба.

**18.** Ответ: 12.

**19.** Ответ: 20.

**20.** Ответ на рис. 15.

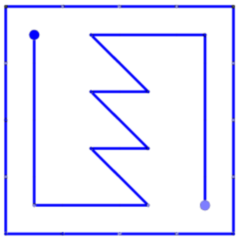

Рисунок 15

**21.** Ответ: 5.

**22.** Ответ: 1122:33=34.

**23.** Ответ: тридцать восемь.

**24.** Ответ: 4, 8.

**25.** Ответ на рис. 16.

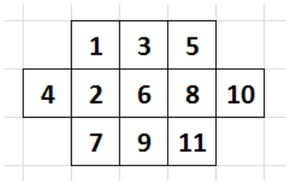


Рисунок 16

**26.** Ответ: А = 3, Б = 8, В = 1, Г = 7.

**27.** Ответ: 2 и 873.

## Математическая карусель

### 5–6 классы

**28.** Ответ: 5303.

**29.** Ответ: 11.

**30.** Ответ: 10000.

**31.** Ответ: 48.

**32.** Ответ: 8.

**33.** Ответ: 1.

**34.** Ответ: 58.

**35.** Ответ: 175.

**36.** Ответ: 1000799998.

**37.** Ответ: 8.

**38.** Ответ: 23.

**39.** Ответ: 91.

**40.** Ответ: например, 4536271809. Возможны и другие ответы – 8172635409, 9081453627 и т.д.

**41.** Ответ: 1.

**42.** Ответ: 12.

**43.** Ответ: 39.

## 9–11 классы

**44.** Произведение равно $100x^2y^4z^2 = 100(zt)^2$. Ответ: 10000.

**45.** $2 \cdot 10 \cdot C_{10}^2$. Ответ: 900.

**46.** Заметим, что эта разность равна разности между суммами двух последовательных групп по $N$ чисел, следовательно, она равна $N^2$. Ответ: 32.

**47.** Изучая последние цифры и остатки по модулю 4, видим, что две последние цифры – либо 00, либо 44. В первом случае подходят все кратные 10 числа (их 99), во втором – все чётные, сравнимые с ±12 по модулю 25. Подходящих чисел вида $50k+12$ и $50k+38$ – по 20. Ответ: 139.

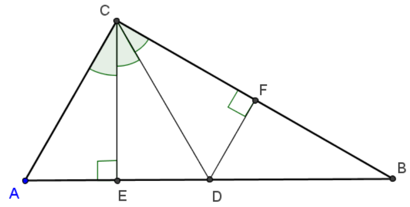


Рисунок 17

**48.** Пусть $D$ – основание медианы $CD$, а $E$ – основание высоты $CE$. Опустим из $D$ перпендикуляр $DF$ на сторону $CB$ (рис. 17). Так как $\Delta AEC = \Delta DFC$, то $DF = AE = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{2} BD$, поэтому $\angle DBF = 30°$. Тогда $\angle ACB = 90°$, а $\angle A = 60°$. Ответ: 30.

**49.** 100! делится на $2^{97}$ и на $3^{48}$, то есть на $2 \cdot 12^{48}$. Поэтому после сокращения знаменатель будет $12^2/2 = 72$. Ответ: 72.

**50.** Нужно максимизировать площадь прямоугольника с периметром 10 км, сторона которого $x = n/5$ ($n \in \mathbf{N}$). Площадь такого прямоугольника равна $x\,(5–x)$, максимум будет достигаться при $x = 2{,}4$ и $x = 2{,}6$. Ответ: 6,24.

**51.** Так как $K$ – точка пересечения медиан треугольника $ABD$, а $L$ – точка пересечения медиан треугольника $CBD$, то $S_{KBD} = 1/3\ S_{ABD}$, $S_{LBD} = 1/3\ S_{CBD}$, и значит, $S_{KBLD} = 1/3\ S_{ABCD}$. Ответ: 3.

**52.** Ответ: только 145.

**53.** Результат Миши равен $100^4 – 80^4$, результат Коли – $100^4/5$, их отношение равно $\frac{5^4-4^4}{5^3} = \frac{369}{125}$. Ответ: 2,952.

**54.** Нужно найти число пересечений графика $y = |\sin(x)|$ и отрезка, соединяющего точки (0,0) и ($2013\pi/2$,1). Кроме нуля, этот отрезок пересекает каждую «полудугу» графика ровно по разу. Ответ: 2014.

**55.** Из условия ясно, что $2x$ – целое. Рассмотрим два случая: $x = n$ ($n$ – целое) и $x = n + 0{,}5$. При $x = n$ $[3x] = 3n$, $[5x]=5n$, $2n = 5n–3n$ верно для любого $x$. Таких решений столько, сколько целых чисел в [1,10], т.е. 10. Если же $x = n + 0{,}5$, то $3x = 3n+1.5$, $[3x]=3n+1$, $5x=5n+2.5$, $[5x]=5n+2$. Уравнение примет вид $2x=(5n+2)–(3n+1) = 2n+1 = 2(n+0.5)$, то есть снова подходит любое такое $x$. Таких чисел на [1,10] ровно 9. Ответ: 19.

**56.** Заметим, что $(1+x)^2 \equiv 1+x^2 \pmod 2$. Перемножая скобки $(1+x)^4 \equiv 1+x^4$, $(1+x)^{32} \equiv 1+x^{32}$ и $(1+x)^{64} \equiv 1+x^{64}$, получаем восемь различных слагаемых. Ответ: 8.

**57.** Раскладывая 3 на различные множители, видим, что $\{x–a, x–b, x–c\} = \{1, –1, –3\}$. Складывая, получим $3x–15 = –3$, откуда $x=4$. Ответ: 4.

**58.** Если соединить отрезками вершины треугольника с центром окружности, то в треугольнике будут 3 равных треугольника, а в шестиугольнике – 6 таких же (рис. 18). Ответ: 2.

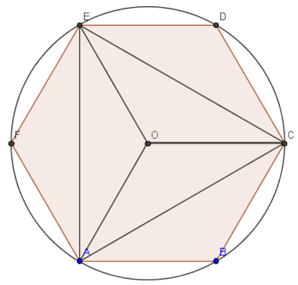


Рисунок 18

# Заключительный тур

## 5 класс

**59.** Первым дыроколом легко прокалывается полоска из 6 клеточек (три левых клетки проколов идут подряд с левого края), аналогично второй дырокол прокалывает полоску из 8 клеток. Чтобы проколоть всю полоску из 20 клеток, надо дважды проколоть 6 клеток и один раз – восемь.

**60.** Не могло. Разность между числами Кирилла и Афанасия должна быть равна 1500 – 600 = 900, что превышает максимальную разность между двумя трёхзначными числами, равную 999 – 100 = 899.

**61.** Решение показано на рис. 19.

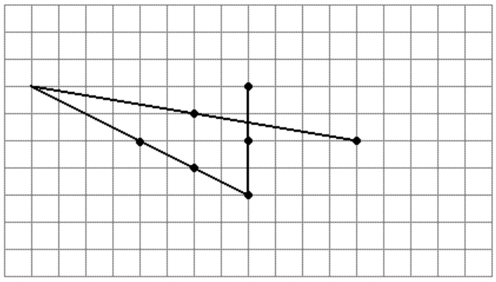

Рисунок 19

**62.** Нет. Предположим, что один ребенок назвался Женей Чиковани, а два других озвучили одно и то же имя – Саша Никитина. Тогда возможны два варианта:

- Две девочки, Саша Никитина и Женя Чиковани, а также мальчик Дима Кубанец, назвавшийся именем Саши Никитиной.
- Саша Никитина девочка, а остальные – мальчики: Дима Кубанец, назвавшийся именем Жени Чиковани, и Женя Чиковани, назвавшийся Сашей Никитиной.

Легко видеть, что учитель не сможет определить число мальчиков среди детей.

**63.** Если в каждый двор селить по 6 животных, их окажется 102=17·6. Поэтому либо в каком-то одном дворе будет только 4 животных (а в остальных по 6), либо в двух дворах по 5 животных, а в остальных по 6.

Рассмотрим первый случай. Во дворах с 6 животными могут жить либо только собаки, либо только кошки (если они живут вместе, то не может быть больше 3 кошек и 2 собак, итого 5). Поэтому есть по 8 дворов с 6 собаками и с 6 кошками (иначе кого-то из них будет больше, чем нужно). Для последнего двора остались 1 кошка и 3 собаки, которых поселить вместе нельзя.

Во втором случае, как мы видели выше, во дворе с 5 животными, могут быть только 2 собаки и 3 кошки, либо 5 кошек, либо 5 собак. Число собак нечётно, поэтому двор с 5 собаками должен быть, причём ровно один. Если при этом есть ещё 8 дворов с 6 собаками, то собак слишком много (48+5=53 или больше), а если есть 7 дворов с 6 собаками и двор с 2 собаками (второй двор с пятью животными), то собак лишь 49=42+5+2. В любом из случаев поселить животных нельзя.

**64.** Назовем семью большой, если в ней хотя бы три человека. Больших семей не меньше одной (в любой группе из девяти человек есть 4 родственника) и не больше двух (иначе три человека из трёх семей составляют девятку, противоречащую условию).

Если большая семья всего одна, то людей, не входящих в неё, не более 5 (иначе шесть не входящих в неё вместе с тремя входящими согласно условию содержат четвёрку родственников, что противоречит единственности большой семьи). Таким образом, среди любых одиннадцати хотя бы шесть будет из большой семьи.

Если же больших семей две, то людей, не входящих в обе, не более двух (иначе тройка из каждой семьи и тройка не входящих в семьи создадут противоречие). Тогда среди 11 хотя бы 9 будет из этих двух семей, а значит, хотя бы 5 – из одной семьи.

**65.** *Решение 1.* Сумма номеров клеток, в которых стоят белые шашки, должна измениться на 110, для черных – аналогично, значит, суммарный путь всех шашек должен составлять как минимум 220. Ходы бывают двух типов: ход вперёд/назад (перемещение), который меняет координату на 1, и прыжок через соседнюю шашку другого цвета, который меняет координату на 2. Прыжком вперёд будем называть прыжок в нужную сторону (для белой шашки – вправо, для чёрной – влево), а прыжком назад – в противоположную сторону.

Для достижения цели разность числа прыжков вперёд и назад должна быть равна 100 – каждая белая шашка должна поменяться с каждой чёрной. Прыжки вперёд за 100 ходов увеличивают сумму продвижений «вперёд» на 200, значит, нужно сделать ещё минимум 20 ходов без прыжков. Таким образом, меньше 120 ходов сделать нельзя.

*Решение 2.* Каждая шашка должна сдвинуться вперёд ровно на 11 клеток. Это следует из того, что в конце одноцветные шашки стоят в том же порядке, что и в начале (для изменения порядка им пришлось бы прыгать друг через друга, а это запрещено условием). Чтобы сдвинуть шашку на 11 клеток, нужно совершить ею не менее 6 ходов – 5 прыжков плюс ещё один ход без прыжка. Чтобы переместить все 20 шашек, нужно не менее 20·6 = 120 ходов. Быстрее достичь цели нельзя.

## 6 класс

**66.** Решение показано на рис. 20.

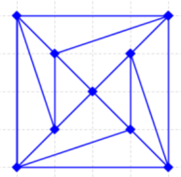

Рисунок 20

**67.** Допустим, что кошка весит столько же, сколько мышка. Тогда бабка ровно на одну мышку тяжелее жучки, а внучка весит не меньше, чем жучка с мышкой, т.е. не меньше бабки. Противоречие. Поэтому кошка весит не менее двух мышек, жучка – не менее трёх мышек, внучка – не менее четырёх мышек, а бабка – не менее пяти мышек, так что вместе они весят не менее 15 мышек.

**68.** Пусть $x$ – количество задач, решённых обоими братьями. За каждую из них они получат вместе по 4+1 = 5 очков. Кроме того, есть $60–x$ задач, решённых только первым и $60–x$ решённых только вторым. За них каждый получит по 4 очка. Итого $5x+4(60–x)+4(60–x) = 480–3x$ очков, что делится на 3 и поэтому не равно 313.

*Замечание*. Можно также заметить, что $4 \equiv 1 \pmod 3$, так что все 120 начислений по 1 и 4 в сумме дадут остаток 0 по модулю 3.

**69.** Если мы проколем левой иголкой дырокола-6 семь последовательных клеток, то окажутся проколотыми и семь следующих. Значит, дыроколом-6 можно проколоть 14 клеток подряд. Сделав это 6 раз, мы проколем 84 клетки. Последние 16 клеток проколем аналогично дыроколом–7.

**70.** В каждом квадрате 2×2 сумма не менее 5, а в каждой доминошке 1×2 – не менее 1 (иначе, дополнив её до квадрата 2×2, мы не получим сумму меньше 5). В каждом трёхклеточном уголке сумма не менее 3. Квадрат 9×9 разбивается на 16 квадратиков 2×2, 6 доминошек и пятиклеточный уголок (рис. 21). Значит общая сумма не менее 80+6+3=89.

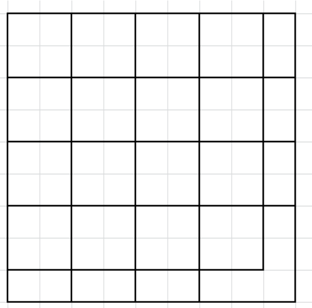

Рисунок 21

**71.** Ответ: 37 и 87 . Другие двузначные числа не подходят,

Всякий подходящий ответ должен заканчиваться на 7 – ибо остальные варианты последней цифры приводят в 0 не более чем за 5 операций (а семёрка – за 6), после чего получившееся «круглое число» превращается в «дважды круглое» ещё не более, чем за 6 операций. При проверке того, что данный ответ годится, достаточно, например, выполнить первые 6 умножений. Если получится 7 на предпоследнем месте, то ответ годный, иначе ответ неправильный.

**72.** Выигрывает второй игрок. Ему нужно добиться того, чтобы суммы «по 50 подряд» на круге давали все возможные остатки по модулю 100 (по разу – заметим, что таких сумм ровно 100). На самом деле второй игрок может добиться даже того, что эти суммы будут сотней последовательных целых чисел.

Разобьём мысленно круг на две половины: левую и правую. На каждый ход первого будем отвечать ходом в диаметрально противоположный сектор, так чтобы:

1) нижнее правое число было больше левого верхнего на 50.

2) в любой другой паре противоположных «правое» число на 1 превосходило «левое»

Пусть после 100 ходов в левой половине сумма чисел равна $S$. Будем поворачивать эту половину по часовой стрелке, следя за изменением суммы в ней. Получим последовательность: $S$, $S$+1, $S$+2,…, $S$+49, $S$+99, $S$+98, $S$+97,…, $S$+51, $S$+50. (Каждый раз убирается один из двух противоположных секторов и добавляется другой. Разности в таких парах секторов мы контролируем). Таким образом, получится 100 последовательных чисел.

## 7 класс

**73.** Можно соединить вершины ломаной из двух равных звеньев, как показано на рис. 22.

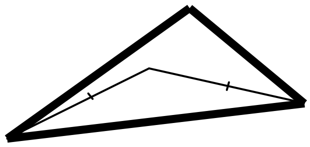

Рисунок 22

**74.** Сможет. Васе нужно спросить у каждой девочки про каждую из остальных. Про Аню каждая из девочек скажет, что она Аня. Но и про Беллу все могут сказать, что она Аня. Остальных девочек Белла обязательно назовёт правильно – то есть не Анями. Таким образом, есть одна или две девочки, которых все остальные девочки назвали Аней. Если такая девочка одна, то это Аня. Если таких две, то это Аня и Белла, и остаётся только определить, какая из них – Аня. Вася знает, что эти две девочки – Аня и Белла, а остальные две – Варя и Галя. Варя и Галя говорят друг про друга правду, поэтому Варя назвала Галю Галей, а Галя назвала Варю Варей. Значит, по их ответам легко узнать, кто из них Варя, а кто Галя. Осталось только заметить, что Белла тоже назовёт Варю Варей, а вот Аня не назовёт Варю Варей. Это и позволяет отличить Аню от Беллы.

**75.** Заметим, что подарок в этом году даёт остаток 2 при делении на 4. Пусть в этом году на день рождения дяди Фёдора маме было $a$ лет, а папе – $b$ лет. Тогда из чисел $a$ и $b$ ровно одно чётное. Через пять лет дядя Фёдор получит $(a+5)(b+5) = ab+5a+5b+25$. Заметим, что $a+b+5$ чётно, а значит, $5a+5b+25$ заканчивается на 0. Следовательно, $(a+5)(b+5) \equiv ab \equiv 2 \pmod{10}$.

**76.** *Решение 1*. Рассмотрим центральный крест из пяти клеток. Каждый из допустимых квадратов либо целиком его перекрашивает, либо не задевает (рис. 23). Значит, цвет центральной клетки всегда будет отличаться от цвета остальных четырёх клеток креста. Следовательно, покрасить доску в один цвет не удастся.

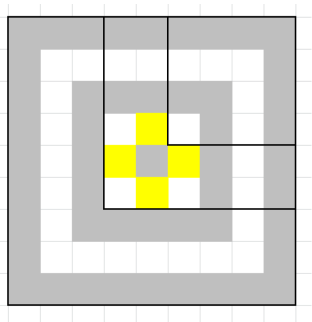

Рисунок 23

Рисунок из условия задачи непригоден для иллюстрации этого решения. В условии нарисован квадрат 11×11, а решение основано на том, что сторона квадрата равна 1 (mod 4).

*Решение 2*. Рассмотрим две клетки на пересечении третьей горизонтали и второй и третьей вертикали. Изначально они покрашены в разные цвета. Каждый допустимый квадрат либо перекрашивает обе клетки, либо не задевает ни одной. Значит, покрасить эти две клетки в один цвет нельзя.

**77.** Пронумеруем варианты ответов номерами от 1 до 5. Студенты должны разделиться на 5 групп по 6 человек, и каждая группа должна выбрать свой вариант. Тот, кому достался листок с правильным ответом, должен прибавить к номеру своего ответа номер правильного ответа и выбрать соответствующий ответ (возможно, уменьшив число на 5). Тогда остаток от деления на 5 у суммы номеров всех ответов студентов будет таким же, как у правильного ответа.

**78.** Если рост и вес делятся на 3, то все четыре числа делятся на 3. Если только рост или только вес делится на 3, то только одно из четырёх делится на 3. Если оба не делятся на 3, то только сумма или только разность делится на 3. Из четырёх чисел на 3 делиться могут либо одно, либо все четыре. Следовательно, количество чисел, кратных 3, сравнимо с 50 по модулю 3. Но $66 \neq 50 \pmod 3$.

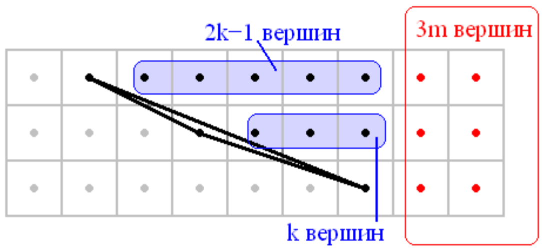


Рисунок 24

**79.** Вершины одного треугольника не могут одновременно находиться в верхней и нижней строках. Действительно, такой треугольник делит остальные вершины на две части, а каждый из остальных треугольников целиком лежит в одной из частей. Однако можно доказать, что число вершин в одной из частей не кратно трём (см. рис. 24; учитываем, что отмеченные точки не могут лежать на сторонах треугольника, иначе их не хватит). Значит, у каждого треугольника вершины находятся либо в верхней и средней строках, либо в средней и нижней. Получается, что каждый треугольник должен иметь вершину в средней строке. Поскольку треугольников 2013 и точек в средней строке тоже 2013, то у каждого треугольника такая вершина ровно одна. Но тогда у каждого треугольника либо две вершины в верхней строке и 0 в нижней, либо 0 в верхней и две в нижней. В обоих случаях в крайних строках чётное число вершин, а в сумме оно должно равняться 2013. Противоречие.

## 8 класс

**80.** Да, например, 31·28 и 32·29 кончаются на 8, а 33·30 делится на 10.

**81.** Поскольку $\angle DAB = \angle ACF$ как смежные с равными углами, то $\Delta DAB = \Delta ACF$ и $\angle ADB = \angle CAF$. $\angle ADB+\angle CFA = \angle CAF+\angle CFA = 180°-\angle ACF = \angle ACB$. Из равнобедренного $\Delta CBE$ находим: $\angle BEC = \angle BCE$. Кроме того, $\angle ACB = \angle ABC$. Тогда в $\Delta ACE$ $\angle C=\angle A+\angle E$, откуда $\angle C = 90°$, $\angle A+\angle E = 90°$; а это и есть искомая сумма.

**82.** Будем пользоваться только прямоугольниками, прилегающими к правому верхнему углу. Упорядочим клетки на доске, как на рис. 25.

Посмотрим на цвет клетки 1. Если он нас не удовлетворяет, перекрасим прямоугольник с одной вершиной в клетке 1 и противоположной вершиной в правом верхнем углу. Проделаем то же с вершинами 2, 3, 4 и т.д. Отметим, что при «обработке» клетки *i* все клетки с меньшими номерами остаются нетронутыми.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

**Рисунок 25**

**83.** Выигрывает первый игрок. Пока в куче больше трёх камней, он должен брать всё время один камень, вынуждая второго брать два. После каждой пары ходов число камней уменьшается на 3, поэтому перед каким-то ходом первого игрока в куче останется один, два или три камня. Если осталось три, то он забирает все три; иначе он забирает один камень, остаётся ноль или один (и второй проиграл, т.к. не может его взять).

**84.** Заметим, что если подряд стоят два дылды, то следующий за ними ребёнок – мелкий. Поэтому надо доказать, что существует не менее 20 пар стоящих рядом дылд. Попросим поднять руку всех детей, чей правый сосед не дылда. Заметим, что поднимут руку не более 10 человек (потому что «недылд» не более 10). Поскольку дылд хотя бы 30, то дылд, не поднявших руку, не менее 20. Каждый из них соответствует паре рядом стоящих дылд, а значит, и мелкому.

**85.** Сумма синих чисел не превосходит $25 + 26 + ... + 48 = 12·73 < 1000$, а произведение красных не меньше $24! > 9!·10^{15} > 1000·10^{15} = 1000^6$, т. е. произведение превосходит шестую степень суммы. Значит, показатель степени больше шести.

Поэтому в разложение произведения на множители все простые числа должны входить не менее чем в 7-й степени. Такими множителями могут быть лишь 2, 3 и 5, поскольку число 7 в разложение 48! входит 6 раз (а большие простые числа — ещё меньше). Тогда все числа, имеющие другие простые множители, должны быть синими. Однако среди чисел от 1 до 48 простые множители, большие пяти, имеют 25 чисел. Все они не могут быть синими.

**86.** См. решение задачи №79.

## 9 класс

**87.**

**87.1.** Разобьем 100 монет на пары и взвесим каждую пару. Если хоть одна монета оказалась более тяжёлой, она настоящая. Если же все 50 взвешиваний показали равенство, то 101-я монета (не участвовавшая во взвешиваниях) – настоящая.

**87.2.** Эта задача является частным случаем следующей, но допускает и более прозрачное решение. Сравним первые две монеты. Если они равны – одну отложим в хранилище, а вторую сравним со следующей, а если не равны – выкинем обе и возьмём для сравнения следующую пару монет. Такую же операцию будем продолжать и дальше, каждый раз сравнивая со следующей какую угодно монету из хранилища, а если оно пусто – то сравнивая между собой две следующих монеты. Поскольку выкидываем мы только различающиеся по весу монеты, то для оставшихся монет сохраняется условие «монет какого-то веса больше половины». Но только такие монеты и могут остаться в хранилище после того, как мы взвесим все монеты. Поскольку в каждом взвешивании мы брали хотя бы одну новую монету, а первым – две, то это случится не позднее 100-го взвешивания.

**87.3.** Разобьём монеты на пары и проведем взвешивание каждой пары. Если весы показывают неравенство, то обе монеты исключаем из дальнейшего рассмотрения. При этом свойство «среди оставшихся больше половины настоящих» остается верным. Среди оставшихся пар выберем по одному представителю и, добавив при необходимости 101-ю монету, опять организуем взвешивания в парах. Снова выбросим все монеты (и равные им), которые показали неравенство. Таким образом, мы либо обнаружим достаточно большую группу одинаковых монет (значит, они настоящие), либо оставшаяся монета будет настоящей.

Заметим, что на каждом этапе в каждой группе из $2n$ монет, среди которых установлено равенство, есть две монеты, участвовавшие ровно в одном взвешивании. Выбирая их для последующих взвешиваний, мы обеспечим соблюдения ограничения на 2 взвешивания.

*Комментарий*. Если мы выкидываем кучку из $2n$ и $2n$–1 монет, то от большей кучи оставляем монетку, имеющую возможность участвовать еще в одном взвешивании. Так же отметим, что у нас на каждом шаге остается ровно одна «неполная» группа, и именно она может иметь не две, а всего одну монетку, которую можно взвешивать дальше. Однако на следующем шаге (при слиянии или выбрасывании) эта ситуация не ухудшается.

**87.4.** Этап 1. Найдем хотя бы одну монетку, которая точно принадлежит большинству, если оно есть.

Этап 2. Убедимся в том, что она действительно принадлежит большинству, или в том, что большинство пусто.

Этап 1 (ср. с решением задачи №87.2) выполняется следующим образом. Для начала первую монетку положим на стол – первой в будущей стопке. Кроме того, некоторое место на столе зарезервируем для будущей кучи. Возьмём очередную (ранее не взвешенную) монету и сравним её с верхней монетой стопки. Если они различны, то положим эту монету сверху на стопку, и если куча непуста, то возьмём из неё любую монету и положим и её на стопку сверху. Если две этих монеты равны – то кинем очередную монету в кучу, а стопку трогать не будем. Когда сделаны 100 взвешиваний, этот этап заканчивается. Его итог можно выразить в двух свойствах:

- никакие две соседние монеты в стопке не одинаковы
- если в этот момент куча непуста, то все монеты в куче одинаковы, причем верхняя монета стопки – такая же.

Из этих свойств вытекает, что никакая монета не из кучи не может принадлежать большинству. Следовательно, если монета входит в большинство, то она равна по весу монетам из кучи. В частности, можно считать таковой монету, которая лежит в стопке сверху.

Этап 2. Снимем из стопки верхнюю монету М и начнём поочередно сравнивать её с монетами из стопки (каждый раз – с очередной верхней). При равенстве выкинем из стопки (вообще) две верхних монеты (если они там еще есть). При неравенстве – выкинем одну монету из стопки и одну из кучи. (Мы каждый раз выкидываем одну монету из предполагаемого большинства и одну – не из большинства.) Этап 2 заканчивается, когда или куча, или стопка закончатся. Точнее, когда мы не можем сделать то действие, которое предполагается сделать после взвешивания. Если в этот момент в стопке осталась ровно одна монета, переложим её в кучу. Если по окончании этапа 2 куча непуста, то среди монет есть большинство, и М – одна из монет большинства. Если куча пуста, то большинства нет. Этот этап требует не более 50 взвешиваний, потому что каждый раз выкидываются две монеты. Итого для $n = 101$ имеем 100+50, т.е. не более 150 взвешиваний.

**88.**

**88.1.** Шесть точек получается только в том случае, если нет точек, через которые проходят все три окружности. Тогда на каждой окружности лежит ровно 4 точки (являющиеся вершинами правильного шестиугольника), поэтому каждая из окружностей совпадает с окружностью, описанной вокруг этого шестиугольника, т.е. все три окружности совпадают.

**88.2.** Три окружности дают четыре точки пересечения только при наличии «тройной» точки. Тогда, в зависимости от того, какой из вершин ромба является тройная точка, путем простых вычислений получаем два ответа: 1, 1, $\sqrt{3}$ или 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.

**88.3.** Итак (см. решение задачи №88.1), на каждой окружности лежит 4 точки. С другой стороны, какие бы 4 из 6 точек мы не взяли, 3 из них окажутся лежащими на одной из исходных окружностей. А значит, «новая» окружность (содержащая этот набор из 4 точек) с неизбежностью совпадет с одной из исходных.

**88.4.** Так как 9900 – максимальное возможное количество точек, то тройных точек нет, а на каждой окружности лежит ровно 198 точек. Рассмотрим произвольный набор из 198 отмеченных точек, пусть он задает «новую» окружность. Это значит, что в нём не более двух точек, принадлежащих каждой из 100 исходных окружностей, тогда, а так как первые 98 окружностей дают не более 196 точек, то оставшиеся две точки могут являться только пересечением 99-й и 100-й окружностей. Повторив те же рассуждения для остальных пар окружностей, получаем, что среди этих 198 точек – все возможные отмеченные точки. Значит, «новая» окружность имеет три общих точки с какой-то из исходных, а значит, совпадает с ней. Полученное противоречие означает, что все окружности можно восстановить.

**89.**

**89.1.** Да, если исходное уравнение имело вид $(x - 3/2)^2=0$. Тогда наличие корней у уравнения №2 равносильно равенству $\frac{3x+1}{2x+1} = \frac{3}{2}$, которое, очевидно, не может быть выполнено.

**89.2.** При указанной замене корни должны либо сохраниться, либо поменяться местами друг с другом. В любом случае корни должны удовлетворять уравнению $f(f(x))=x$, где $f(x) = \frac{3x+1}{2x+1}$. Решая его, находим два числа $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ (на самом деле они удовлетворяют и уравнению $f(x)=x$). Так что, с точностью до коэффициента, уравнение №1 имеет вид $2x^2 - 2x - 1 = 0$.

**89.3.** Нет. При замене $x \to f(x)$ либо оставались бы на месте все три корня, либо пара корней менялась бы местами, либо был цикл длины 3. В первых двух случаях эти корни были бы решениями уравнения $x = f(f(x))$, в третьем – корнями уравнения $x = f(f(f(x)))$. Однако оба отображения $f(f(x))$ и $f(f(f(x)))$ являются нетождественными дробно-линейными, и не могут иметь более двух неподвижных точек. (Последнее можно проверить, непосредственно вычислив $f(f(x))$ и $f(f(f(x)))$ и решив соответствующие уравнения.)

**89.4.** Если уменьшить дробь, заменив в числителе 2 на 1, дробь станет равной $x^2 - x + 1$, что всегда не меньше $x$. Поэтому указанная замена увеличивает число, так что тут никаких циклов вообще не может быть. Ответ – $\infty$.

## 10 класс

**90.** Предварительно сделаем несколько наблюдений.

*Утверждение 1.* $y_n = 2x_n$. <u>Доказательство</u>: $y_1 = 2x_1$, а сравнивая $x_{n+1} = \frac{x_n y_n + 1}{y_n}$ и $y_{n+1} = \frac{x_n y_n + 1}{x_n}$, мы видим, что если $y_n = 2x_n$, то и $y_{n+1} = 2x_{n+1}$.

Таким образом, в дальнейшем можно рассматривать только $(y_n)$

*Утверждение 2.* Последовательность $y_n$ – возрастающая, все члены которой положительны. <u>Доказательство</u>: Мы каждый раз прибавляем к $y_n$ положительное число.

*Утверждение 3.* Если записать последовательность $y_n$ в виде несократимой дроби $y_n = p_n/q_n$, то $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$, $q_{n+1} = p_n q_n$ при всех $n>1$. <u>Доказательство</u>: Выпишем рекуррентное соотношение $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = y_n + \frac{2}{y_n} = \frac{p_n^2 + 2q_n^2}{p_n q_n}$. Нам осталось доказать, что при $n>1$ получившаяся дробь несократима. Это легко сделать по индукции. Предположим противное, и пусть $d$ – нечётное простое число, являющееся общим делителем $p_{n+1}$ и $q_{n+1}$. Тогда $d$ делит либо $p_n$, либо $q_n$ (для определённости, $p_n$). Но если $p_{n+1}$ и $p_n$ делятся на $d$, то и $2q_n^2 \vdots d$, а значит, $q_n$ делится на $d$. Отсюда $p_n/q_n$ – сократимая дробь. Противоречие. Но так как число 2 также не может быть общим делителем $p_{n+1}$ и $q_{n+1}$, то дробь несократима.

**90.1.** Пусть последовательность ограничена сверху числом $M$, тогда $y_{n+1} > y_n + 2/M > \ldots > y_1 + 2n/M$, что является неограниченной функцией. Противоречие.

**90.2.** Пусть $y_{100} < 14$. Рассуждая аналогично решению [№90.1](#), получаем $y_{100} > y_1 + 198/14 > 14$.

**90.3.** Проверим выполнение указанного условия при $n$=1 и $n$=2. Дальнейшее рассуждение проведём по индукции. Пусть $n>1$, $q_n \geq 2^{2^{n-2}-1}$. Последовательность возрастающая, поэтому $y_0 > y_1 = 2$, значит, $p_n > 2q_n \geq 2^{2^{n-2}}$. Тогда $q_{n+1} = p_n q_n \geq 2^{2^{n-2}} 2^{2^{n-2}-1} = 2^{2^{n-1}-1}$, что и требовалось доказать.

*Комментарий 1.* В формулировке, предложенной участникам, была допущена опечатка – им предлагалось доказать, что $q_n > 2^{2^{n-1}-n}$. Это верно только для нескольких значений $n$.

*Комментарий 2.* Доказанная оценка не является лучшей из возможных. Например, при $n \geq m$ верно неравенство $q_n \geq \frac{p_m^{2^{n-m}}}{y_m}$ (доказывается по индукции). Отсюда при $m$=4 получаем, что для $n \geq 4$ выполнено неравенство $q_n \geq \frac{33 \cdot 139^{2^{n-4}}}{139} > 32 \cdot 128^{2^{n-4}-1} = 2^{7 \cdot 2^{n-4}-2}$.

**90.4.** В силу равенства $y_{n+1} = y_n + 2/y_n$ имеем $(y_{n+1})^2 > y_n^2 + 4$, после чего по индукции легко получаем, что $y_n^2 > 4n$, что даёт требуемое неравенство.

**91.**

**91.1.** Как известно, график квадратного трёхчлена определяется любыми своими тремя точками. Поэтому нам достаточно узнать значения $F$ в любых трёх точках.

Пусть $x$, $y$, $z$ – попарно различные числа. Спросим сначала $F(x)^2$. Если ответ не равен нулю, спросим $F(x)F(y)$, а затем $F(x)F(z)$. В этом случае из первого ответа мы узнаем $F(x)$ с точностью до знака, а из второго и третьего сможем выразить $F(y)$ и $F(z)$ через $F(x)$. Таким образом, мы получили два набора значений $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$, отличающиеся только знаком. Один из них соответствует трёхчлену $F$, а другой – противоположному ($-F$).

Если же $F(x) = 0$, то спросим $F(y)^2$. Если второй ответ не равен нулю, спросим $F(y)F(z)$; а если равен, то спросим $F(z)^2$. Аналогично первому случаю, мы узнаем набор значений $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$ с точностью до знака.

*Замечание*. Если, например, первым вопросом спросить $F(x)F(y)$ и это произведение окажется равным нулю, мы узнаем только, что $x$ или $y$ является корнем F и, по сути, потеряем один вопрос и не сможем за два оставшихся вопроса узнать $F$.

**91.2.** Достаточно $n+1$ вопроса. Ясно, что n вопросов может не хватить: при любом способе выбора точек одна из точек, выбранных для каждого вопроса, может оказаться корнем $F$. В случае, когда все произведения равны нулю, мы не сможет отличить $F$ от любого многочлена вида $cF$ (где $c$ –любая положительная константа).

Чтобы отгадать $F$ за $n+1$ вопрос, выберем попарно различные точки $a_1$, $a_2$, …, $a_{n+1}$ и постараемся определить значения $F$ в них. Так как у двух различных многочленов $n$-й степени не могут совпасть значения в $n+1$ точке, этого будет достаточно для определения $F$. Мы будем спрашивать произведения $F(a_1)^n$, $F(a_2)^n$, …, $F(a_k)^n$, … до тех пор, пока не получим ненулевой ответ. (Заметим, что у многочленов $n$-й степени не бывает более $n$ корней, поэтому ненулевой ответ обязательно будет).

Пусть, скажем, $F(a_i) \neq 0$. Тогда из $i$-го ответа мы знаем $F(a_i)$ с точностью до знака, а далее будем спрашивать произведения $F(a_i)^{n-1}F(a_{i+1})$, $F(a_i)^{n-1}F(a_{i+2})$, …, $F(a_i)^{n-1}F(a_{n+1})$. Теперь мы знаем, что $F(a_1) = F(a_2) = \ldots = F(a_{i-1}) = 0$, определили $F(a_i)$ с точностью до знака и выразили $F(a_{i+1})$, …, $F(a_{n+1})$ через $F(a_i)$. Это значит, что мы, как и в первом пункте, получили два набора значений $F$, отличающиеся только знаком. Один из них соответствует многочлену $F$, другой – многочлену $-F$.

**91.3.** Решение в основном повторяет предыдущий пункт. Вместо произведений $F(a_1)^n$, $F(a_2)^n$, …, $F(a_k)^n$ … задаются вопросы про произведения $F(a_1)^2$, $F(a_2)^2$, …, $F(a_k)^2$,…

**91.4.** Заметим, что Васе достаточно определить (узнать коэффициенты) многочлен вида $G(x)=F(x+d_1)F(x+d_2)...F(x+d_{15})$ (где $d_i$ – известные ему константы). Действительно, тогда, сравнивая последовательно коэффициенты при $x^{30}$, $x^{29}$, $x^{28}$, он сможет узнать коэффициенты $F$. Чтобы определить $G$, Васе достаточно узнать его значения в каком-то наборе из 31 точки. Для этого он может называть компьютеру наборы натуральных чисел, у которых попарные разности ограничены какой-нибудь константой $K$, например, непересекающиеся сотни последовательных чисел.

Тогда попарные разности принимают лишь конечное число значений, поэтому если упорядочить два набора $a_1 < a_2 < \ldots < a_{15}$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_{15}$, то и для наборов разностей $a_1 - b_1$, ... $a_{15} - b_{15}$ есть лишь конечное число значений. Если эти наборы разностей совпадут, то два набора отличаются на константу. Задав достаточное число вопросов, мы найдем 31 набор из 15 чисел, из которых каждые два отличаются друг от друга лишь прибавлением константы. Назвав их, мы сможем найти нужные 31 значение многочлена $G$.

*Второй способ*. Зададим $\cdot 30C_{100}^{15} + 1$ вопрос про непересекающиеся сотни чисел вида $100N$, ..., $100N+99$. Тогда какой-то 31 выбор компьютера будет соответствовать одной и той же 15-ке по модулю 100. То есть получим значения какого-то одного многочлена описанного вида в 31 точке (разности между которыми кратны 100).

**92.** Чевианой здесь называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с любой точкой на противоположной стороне.

**92.1.** Заметим, что каждый из отрезков $AN$ и $BM$ разбивает $ABC$ на равновеликие куски (они состоят из двух частей равной площади каждый). Следовательно, они являются медианами. Пусть $O$ – точка их пересечения, тогда $AOB$ и $AOM$ имеют равные площади, значит, $BO = OM$, Но медианы треугольника пересекаются в отношении 2:1, а не 1:1.

**92.2.** Треугольники $ABM$, $AMN$ и $ANC$ равновелики. Значит, отрезки $BN$, $NM$, $MC$ равны. Пусть точка $K$ ближе к $A$, чем $L$. Рассмотрим треугольник $BKA$. Чевианы $AM$ и $AN$ делят его на три равновеликие части. Следовательно, отрезок $BK$ они тоже делят на 3 равные части. Итак, $AN$ и $AM$ делят на три равные части отрезки $BC$ и $BK$. Значит, $AN \parallel AM$. Противоречие.

**92.3.** Легко понять, что если три чевианы пересекаются в одной точке, то частей будет 6, а если не пересекаются – то 7. Осталось доказать, что 7 не может быть. Пусть чевианы не пересеклись и частей 7. Тогда каждая из чевиан делит противоположную сторону в отношении 3:4. Обозначим чевианы *AK*, *BL*, *CM*, причём *BK*:*KC* = 3:4. Пусть *AK* пересекает *BL* и *CM* в точках *X* и *Y* соответственно. *CY* делит Δ*ACK* на два равновеликих, поэтому *Y* – середина *AK*. А так как *AM*:*AB* = 3:7, то площадь треугольника *AMY* равна 3/7·1/2 = 3/14 от площади треугольника *AKB*, а должна быть 1/3.

**92.4.** *Лемма*. Если в четырёхугольнике *ABCD* отметить точки *X* и *Y*, лежащие на стороне *AB* так, что *AX* = *XY* = *YB*, и точки *Z*, *T* на стороне *CD* так, что *CZ* = *ZT* = *TD*, то площадь четырёхугольника *XYZT* не больше полусуммы площадей двух других четырёхугольников. Это несложно доказывается с помощью формулы площади *S*=1/2 *xy*·sin*A*.

Теперь используем эту лемму. Рассмотрим четырёхугольник *AKCM*. Пусть *AK* пересекает отрезки *BL* и *DM* в точках *X* и *Y* соответственно. Даже если бы *BL* и *DN* делили каждый из отрезков *AK* и *CM* на три равные части, всё равно центральная часть четырёхугольника *AKCM* была бы меньше полусуммы двух остальных. Однако *KX* – ровно треть отрезка *AK*, а отрезок *AY* никак не может занимать меньше трети *AK* (да и ровно треть не может). Аналогично с отрезком *CM*. Значит, центральная часть четырёхугольника *AKCM* заведомо меньше полусуммы двух остальных частей.

## 11 класс

**93.** См. решение сюжета №90.

**94.** См. решение сюжета №91.

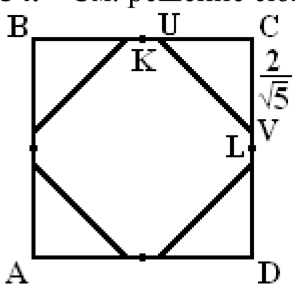


Рисунок 26

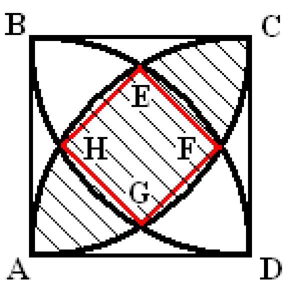


Рисунок 27

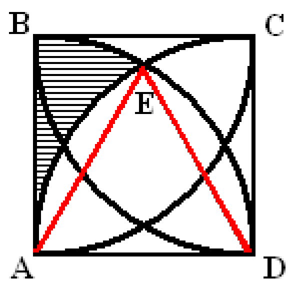


Рисунок 28

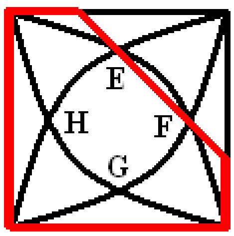


Рисунок 29

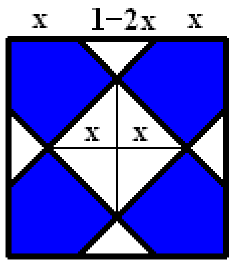


Рисунок 30

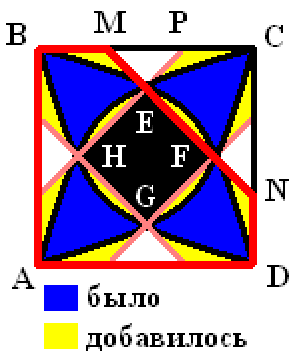


Рисунок 31

**95.**

**95.1.** Поскольку площадь квадрата 1, а площадь каждого шаблона 9/10, то площадь каждого лепестка не больше 1/10, значит, суммарная площадь лепестков не больше 4/10.

Эта оценка достигается, если площадь частей, «прилегающих к сторонам», равна нулю. Для этого шаблон должен включать в себя середины всех сторон; поскольку он выпуклый, то из-за этого в нём должна содержаться фигура *ABKLD* площадью 7/8. Но 9/10 > 7/8, так что этого нетрудно добиться (например, подойдёт показанная на рис. 26 фигура *ABUVD* – квадрат, от которого отрезан равнобедренный треугольник с катетами $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$).

**95.2.** Площадь каждого шаблона в данном случае равна π/4; площадь «двуугольника» *AC*, заштрихованного на рисунке – π/4−(1−π/4) = π/2−1.

Впишем в «центр» квадрат, как показано на рисунке. Абсцисса точки *E* равна 0.5, поэтому её ордината – $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ордината симметричной ей точки *G* равна $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому диагональ квадрата равна $\sqrt{3}-1$, а площадь – $0.5\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 2-\sqrt{3}$.

Площадь двух лепестков меньше, чем разность площади «двуугольника» и площади квадрата, т.е. меньше $\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}-3$; умножив это число на 2, получим нужную оценку для площади четырёх лепестков.

Заметим, что нетрудно найти площадь лепестков точно. Для этого рассмотрим равносторонний Δ*AED* (все его стороны равны радиусу шаблона, т.е. единице). $S_{\Delta AED} = \sqrt{3}/4$, а площадь сектора *AED* равна π/6, поэтому площадь сегмента, ограниченного дугой в 60°, равна $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}/4$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$. Отсюда, действуя как и раньше, получаем площадь лепестков $2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}-4 \approx 0{,}5113$.

**95.3.** В силу симметрии, границы шаблонов пересекаются в точках *E*(0.5, 0.75), *F*(0.75, 0.5), *G*(0.5, 0.25), H(0.25, 0.5). Заменим шаблоны пятиугольниками, одна из сторон которых будет продолжением отрезка *EF* (*FG*, *GH*, *HE*) до сторон квадрата (рис. 29). Из выпуклости шаблонов следует (см. рис. 30), что площадь лепестков увеличилась! Докажем это (интуитивно очевидное) утверждение строго. А именно, докажем, что области, не входящие в лепестки после замены шаблона (то есть белые и чёрные области на рис. 31), не входили в них и ранее.

Будем пользоваться следующим фактом: если вершины треугольника принадлежат выпуклой фигуре, то и весь треугольник лежит в ней. Рассмотрим один из «белых» треугольников, например, Δ*MEP*. Пусть точка *K* лежит внутри него; докажем, что она не может лежать в лепестке исходного шаблона. Действительно, эта точка лежит вне «шаблона *ABD*»: если предположить противное, то окажется, что вершины Δ*KFH* лежат в шаблоне; а точка *E* лежит внутри этого треугольника (т.е. не на сторонах), поэтому не может лежать на границе шаблона. Аналогично устанавливаем, что точка *K* лежит вне «шаблона *ACD*», т.е. она принадлежит не более чем двум шаблонам и не может лежать в лепестках.

Что же касается чёрного квадрата *EFGH*, то его вершины принадлежат каждому из шаблонов, а значит, там же лежит и весь квадрат.

Из доказанного следует, что максимальная площадь шаблона достигается для построенного нами пятиугольника. Её нетрудно посчитать (даже «по клеточкам»): она равна 5/8.

**95.4.** Заметим, что граница любого шаблона пересекает вертикальную среднюю линию квадрата в какой-то точке с ординатой не меньше 1/2. Тогда можно, как в предыдущем пункте, заменить шаблон пятиугольником, и площадь лепестков увеличится. Поэтому максимум следует искать среди пятиугольников, аналогичных построенному в предыдущем пункте. Все такие пятиугольники различаются только одним параметром; возьмём в качестве такого параметра длину стороны *x*.

Изучим, чему равна площадь лепестков в зависимости от *x*. Точнее, найдём площадь дополнения, которое состоит из четырёх равнобедренных треугольников с гипотенузами $1-2x$ и квадрата с диагональю $2x$. Эта площадь равна $(1-2x)^2+(2x)^2/2 = 6x^2-4x+1$. Исследуя эту квадратичную функцию, видим, что она достигает минимума при $x=1/3$, и при этом равна 1/3. Значит, площадь лепестков максимальна при $x=1/3$ и равна 2/3.

# Оглавление


Предисловие ... 3
Победители олимпиады ... 4
5 класс ... 4
6 класс ... 4
7 класс ... 4
8 класс ... 4
9 класс ... 5
10 класс ... 5
11 класс ... 5
Статистика по задачам ... 5
Количество решённых задач (статистика по участникам) ... 5
Условия задач ... 6
Первый (заочный) тур ... 6
5–6 классы ... 6
7–8 классы ... 6
Математический праздник для 5–7 классов ... 7
Математическая карусель ... 8
5–6 классы ... 8
9–11 классы ... 9
Заключительный тур ... 9
5 класс ... 9
6 класс ... 10
7 класс ... 11
8 класс ... 12
9 класс ... 12
10 класс ... 13
11 класс ... 14
Об авторах ... 14
Указания, ответы и решения ... 16
Первый (заочный тур) ... 16
5–6 класс ... 16
7–8 классы ... 18
Математический праздник ... 19
Математическая карусель ... 19
5–6 классы ... 19
9–11 классы ... 20

Заключительный тур ........ 21
5 класс ........ 21
6 класс ........ 22
7 класс ........ 23
8 класс ........ 24
9 класс ........ 24
10 класс ........ 27
11 класс ........ 29
Оглавление ........ 31