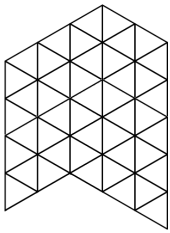
Решения задач 4 класса

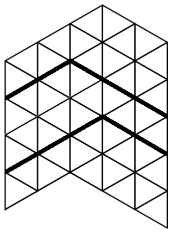
1. *Андрей назвал все натуральные числа от* 180 *до* 220 *включительно («сто восемьдесят», «сто восемьдесят один» и т.д.). Сколько слов он произнёс?*

Решение. Всего названо 41 число. В каждом назван разряд сотен (итого 41 слово). Кроме разряда сотен, ещё по одному слову содержат числа 180, 190, 201–220 (это 22 слова). Число 200 больше не даёт вклада в слова, а остальные 18 чисел содержат ещё по два слова. Итого $41 + 22 + 2 \cdot 18 = 99$ слов.

2. *Покажите, как разрезать фигурку на картинке на три равные части.*



Решение.

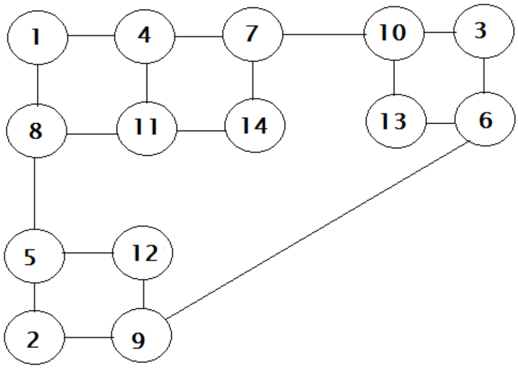


3. *У костра по кругу сидят восемь туземцев из четырёх племен. Каждый говорит своему соседу слева: «если не считать нас, то из моего племени тут никого нет». Известно, что туземцы лгут чужим и говорят правду своим. Сколько может быть туземцев каждого племени?*

Решение. Из одного племени должно быть не менее двух туземцев — уникальный туземец не смог бы солгать соседу, что из его племени больше никого нет. Так как племён всего четыре, то из каждого племени по двое.

4. *Девочка стоит на* 1 *этаже* 14*-этажного дома, на* 12 *и* 14 *этажах которого живут её подружки. Перемещаться по нему можно только на лифте, который умеет перемещать только на* 3 *или* 7 *этажей вверх или вниз. Может ли девочка посетить всех подружек, совершив не больше* 6 *переездов на лифте?*

Решение (1).



На рисунке изображена схема возможных переездов — в кружочках подписаны этажи, а линиями соединены те этажи, между которыми можно проехать на лифте, нажав одну кнопку.

Отсюда видно, что с первого на 12-й и на 14-й этажи можно добраться минимум за три переезда, а от 12 до 14 этажа требуется не менее четырёх переездов. Поэтому за 6 переездов девочка не сможет посетить всех подружек.

Решение (2). Заметим, что каждый переезд меняет чётность этажа. С первого этажа до двенадцатого или до четырнадцатого требуется нечётное число переездов. Так как за один переезд не управиться, то таких переездов надо не менее трёх. С 12-го до 14-го этажа надо чётное число переездов. За два переезда добраться невозможно (ибо 3 и 7 отличаются на 4), поэтому нужно не менее четырёх переездов. В итоге требуется не менее семи переездов.

5. *Вчера на базаре на сто тугриков можно было купить* 9 *пряников и* 7 *пирожных (и даже дали бы сдачу), а сегодня этой суммы уже не хватает. Зато на эти же* 100 *тугриков сегодня можно купить два пряника и* 11 *пирожных (тоже со сдачей), а вчера бы этой суммы не хватило. Пряник и пирожное стоят целое число тугриков, а цена каждой сладости за ночь изменилась не более чем на один тугрик. А сколько сегодня стоит один пряник?*

Решение. Заметим, что что-то одно подорожало (иначе не могла возникнуть ситуация, при которой вчера мы могли купить набор, а сегодня тот же набор — нет), а другая сладость по аналогичным причинам подешевела. Девять пряников и семь пирожных вместе подорожали, значит, пряник подорожал, а пирожное подешевело. Этот набор подорожал за ночь на 2 тугрика, т. е. вчера он стоил 99 тугриков, а сегодня 101. Итак, сегодня 9 пряников $=$ 101 тугрик — 7 пирожных, т.е. вычитая из 101 число, кратное 7, мы должны получить число, кратное 9. Такое возможно лишь в одном случае: $101 - 56 = 45$. Тогда пряник сегодня стоит 5 тугриков, а пирожное — 8 тугриков.

6. *В наборе были гирьки весом 43, 70, 57 г, поровну каждого вида. Малыш потерял несколько гирек (менее пяти), взвесил остаток на весах и получил* 20 172 *грамма. Сколько и каких гирек потерялось?*

Решение (1)**.** Если бы гирьки не терялись, то общий вес оканчивался бы на 0. Следовательно, вес потерянных гирек оканчивается на 8. Это может быть, только если потеряны 4 гирьки 57 г (потеря 70 г или пары $43 + 57$ не влияет на последнюю цифру суммарного веса).

Решение (2)**.** Разобьём изначальный набор гирек на тройки $43+70+57$. В каждой тройке общий вес равен 170 г. Заметим, что потеряно не более $4 \cdot 70 = 280$ г. Поэтому нам следует найти все числа от 20 172 до 20 452, кратные 170. Таких чисел всего два: 20 230 и 20 400 г.

В первом случае потеряно 58 г, чего не может быть. Во втором случае потеряно 228 г. Этот вариант возможен, только если потеряно 4 гири по 57 г. В самом деле, количество потерянных 70-граммовых гирь должно быть чётно (иначе бы потерянный вес был нечётным). Если не потеряно ни одной гири по 70 г, то максимально возможный потерянный вес составляет $4 \cdot 57 = 228$ г. Если же потеряно две 70-граммовые гири, то остаётся 88 г на две оставшиеся гири, а этот вес набрать, очевидно, нельзя.

7. 22 *футболиста сыграли три тренировочных игры (разбиваясь каждый раз на два состава по* 11 *человек). Докажите, что какие то два футболиста все три раза играли в разных командах.*

Решение (1)**.** После первого матча выкрасим ребят, игравших в одной команде, в красный, а игравших в другой команде — в синий. Тогда во втором матче среди каждого из составов найдутся по крайней мере 6 одноцветных ребят, причем эти шестерки разных цветов. А в этих двух шестерках найдутся два разноцветных футболиста, не сыгравших в одной команде и в третий раз (иначе им всем нужно попасть в одну команду, для чего их слишком много).

Решение (2)**.** Изобразим игроков в виде точек и будем соединять отрезками тех, кто был сокомандником. После первой игры от каждого игрока будет выходить по 10 отрезков, а так как каждый соединяет двоих, то всего отрезков будет $\frac{22 \cdot 10}{2} = 110$. Теперь посмотрим на произвольную команду во второй или третьей игре. Пусть x ребят из нее были в первом матче на одной стороне, а оставшиеся $11 - x$ — на другой. Тогда новых отрезков добавится не более, чем $x(11 - x) \leqslant 30$ (это можно, например, легко проверить перебором). То есть за оставшиеся две игры отрезков добавится, максимум, $4 \cdot 30 = 120$ и в итоге их будет не более $110 + 120 = 230$. Но если бы каждый сыграл с каждым, то их было бы $\frac{22 \cdot 21}{2} = 231$.

Решения задач 5 класса

1. *Константин произнёс названия всех натуральных чисел от* 180 *до* 220 *включительно, а Михаил — от* 191 *до* 231 *включительно. Кто больше произнёс слов и на сколько?*

Решение. Уберем встречающиеся у обоих числа: 191–220. Тогда у каждого останется по 11 чисел: у Константина 180–190, у Михаила 221–231. Заметим, что в названиях чисел 181–189, 221–229 и 231 по три слова, а в 180, 190 и 230 — по два. Получается, что Михаил произнес на одно слово больше.

2. *В ряд стоят числа от* 1 *до* 9. *Известно, что любые два числа, стоящие через одно, различаются на* 1. *Может ли число* 4 *быть крайним в этом ряду?*

Решение. Заметим, что через одно место от 1 может стоять только 2. Значит, число 1 либо крайнее, либо соседнее с крайним. Начнем считать места с этого края. Если 1 стоит на первом месте, то 2 стоит на третьем, на пятом может быть только 3, а 4 оказывается на седьмом месте. Если 1 стоит на втором месте, то 2 стоит на четвертом, на шестом может быть только 3, а 4 оказывается на восьмом месте. В обоих случаях 4 не стоит с краю.

3. *Из доски* 6×6 *вырезали угловые квадраты* 2×2. *Расставьте на оставшихся полях по два коня каждого из* 10 *цветов так, чтобы в каждой клетке стоял ровно один конь и одноцветные кони били друг друга.*

Решение. Пример подходящей расстановки показан на рисунке.

		1	2		
		8	9		
8	9	7	1	2	3
7	6	5	3	10	4
		10	4		
		6	5		

4. *Девочка стоит на первом этаже* 24*-этажного дома, на* 13*-м,* 16*-м и* 24*-м этажах которого живут её подружки. Лестницы в доме нет, но есть лифт, который умеет перемещаться только на* 7 *или на* 10 *этажей вверх или вниз. Может ли девочка посетить всех подружек, совершив не более* 10 *переездов на лифте?*

Решение. Да, может. Например, так: 1 – 11 – 21 – 14 – 24 – 17 – 10 – 20 – 13 – 6 – 16.

5. *На фестиваль «Хоббиты — за культурное разнообразие!» прибыло более* 20 *участников. Корреспондент обнаружил, что среди любых* 15 *участников фестиваля найдётся не менее* 4 *людей и не менее* 5 *эльфов. Сколько хоббитов приняло участие в фестивале? Укажите все возможные ответы и докажите, что других нет.*

Решение. Предположим, что есть хотя бы один хоббит. Если среди участников наберется 10 людей, то в их компании с хоббитом и еще 4 любыми участниками не найдется 5 эльфов, что противоречит условию. Значит, людей не более 9. Поскольку всего участников более 20, то найдутся 12 участников, не являющихся людьми. Но тогда, добавив к ним 3 участников, получим компанию, противоречащую условию. А это означает, что хоббитов не было вовсе.

6. *Чебурашка на свои деньги купил в магазине у девочки Гали столько же зеркал, сколько Гена — в магазине у Шапокляк. Если бы Гена покупал у Гали, у него было бы* 27 *зеркал, а если бы Чебурашка покупал у Шапокляк, у него было бы* 3 *зеркала. Сколько зеркал купили бы Гена и Чебурашка вместе, если бы Галя и Шапокляк договорились и установили цену на зеркала, равную среднему их нынешних цен? (Средним двух чисел называется половина их суммы, например, для чисел* 22 *и* 28 *среднее равно* 25*.)*

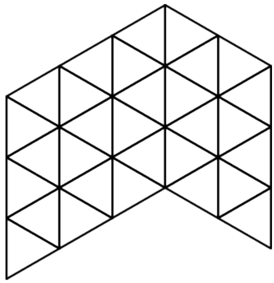
Решение. Пусть у Гены в x раз больше денег, чем у Чебурашки. Поменяем деньги Гены и Чебурашки местами. Тогда при втором способе покупки количество зеркал должно стать равным. Следовательно, $3x = \frac{27}{x}$, откуда $3x^2 = 27$, и $x = 3$. Поэтому у Гены изначально денег было в три раза больше, чем у Чебурашки, а цена у Шапокляк в три раза выше, чем у Гали. Значит, денег всего у них было в четыре раза больше, чем у Чебурашки, а средняя цена вдвое больше, чем у Гали. Изначально Чебурашка смог купить $3 \cdot 3 = 9$ зеркал, тогда вдвоем с Геной при средней цене они купили бы $\frac{4 \cdot 9}{2} = 18$ зеркал.

7. *В наборе были гирьки массой* 5*,* 24 *и* 43 *грамма, поровну каждого вида. Все имеющиеся гирьки взвесили, и масса оказалась равной* 606060…60 *граммам. Докажите, что а) хотя бы одна гирька потеряна; б) более* 10 *гирек потеряно.*

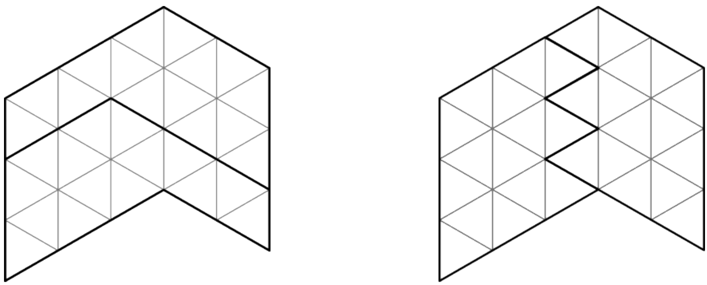
Решение. а) Заметим, что масса одного полного набора — 72 грамма. Это число делится на 8, а суммарная масса — нет, значит, что-то обязательно потеряли. б) Масса одного полного набора делится на 24, а общая масса — нет, зато она делится на 12. Поскольку масса гирек второго типа делится на 24, то суммарная масса потерянных гирек по 5 и по 43 не делится на 24 и делится на 12. Пусть потеряли a гирек по 5 и b гирек по 43. Тогда число $5a + 43b$ делится на 12, но не делится на 24. Поскольку $5a + 43b = 5(a - b) + 48b$, то $5(a - b)$ делится на 12, откуда $a - b$ делится на 12. Равными они быть не могут, т.к. если $a = b$, то $5a + 43b = 48b$ — делится на 24. Значит, a и b отличаются хотя бы на 12, т.е. потеряли как минимум 12 гирек, что больше 10.

Решения задач 6 класса

1. *Покажите, как разрезать фигуру по линиям на две равные части. (Части должны совпадать не только по количеству треугольников, но и по форме.)*



Решение. Существует два возможных решения (достаточно было привести хотя бы одно):



2. *На проводе сидят* 1000 *ворон. В конце каждой минуты каждая третья (третья, шестая, девятая и так далее) ворона улетает.*
а) Какими изначально по счету были вороны, которые останутся на проводе в конце концов?
б) Сколько минут пройдет до момента, когда вороны перестанут улетать?

Решение. а) Ясно, что в конце останется не более двух ворон, а первая и вторая никогда не улетают. Значит, это будут именно они. Ответ: 1 и 2.

б) Легко видеть, что количество улетающих в очередную минуту ворон — треть их числа, округляемая вниз. Таким образом, остается всего лишь аккуратно посчитать:

минута	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
было ворон в начале	1000	667	445	297	198	132	88	59
улетит в конце	333	222	128	99	66	44	29	19

минута	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
было ворон в начале	40	27	18	12	8	6	4	3	2
улетит в конце	13	9	6	4	2	2	1	1	0

Видим, что вороны перестали улетать на 17 минуте, таким образом получаем ответ: 16 минут.

3. *Назовем число, состоящее из одинаковых цифр,* красивым. *Любое ли пятизначное число можно представить в виде суммы красивых чисел попарно разной длины?*

Ответ: нет.

Решение (1)**.** Если в требуемой сумме есть число с хотя бы пятью знаками, то результат не меньше 11 111. Иначе он не больше $9 + 99 + 999 + 9999 = 11\,106$. Таким образом, ни одно из чисел от 11 107 до 11 110 так представить нельзя.

Решение (2)**.** Нужное представление пятизначного числа всегда имеет вид

$$a \cdot 11111 + b \cdot 1111 + c \cdot 111 + d \cdot 11 + e,$$

где $0 \leqslant a, b, c, d, e \leqslant 9$. Посчитаем, сколько есть различных подходящих представлений.

При $a = 0$ должно быть $b = 9$, иначе сумма не превышает $8888+999+99+9 = 9995 < 10\,000$. В таком случае выходит не более 1000 представлений. При $a = 9$ должно быть $b = c = d = e = 0$, иначе сумма будет шестизначна. В таком случае получается только одно представление. При всех остальных восьми вариантах для a имеется не более 10 000 различных представлений. Суммарно же их не более 81 001, что меньше количества пятизначных чисел (которых 90 000)

4. *У костра по кругу сидят семеро туземцев из нескольких племен. Каждый говорит своему соседу слева: «Среди остальных пятерых нет моих соплеменников». Известно, что туземцы лгут чужим и говорят правду своим. Представители скольких племен собрались у костра?*

Решение. Если есть хотя бы 4 туземца из одного племени, то двое из них сидят рядом, тогда один из них солжет другому, хотя должен сказать правду. Если из какого-то племени лишь один туземец, то он говорит правду левому соседу, хотя должен врать. Значит, каждое племя имеет двух или трех представителей.

Тогда при двух племенах туземцев не более $3+3 < 7$, при четырех — не менее $2 + 2 + 2 + 2 > 7$, то есть племен ровно три.

5. См. задачу 7 для 4 класса.

6. *Вася и Петя загадали два различных числа, и у каждого из них оказалось столько же простых делителей, сколько и составных. Могут ли числа Васи и Пети иметь общие делители, большие 1?*

Решение. Пусть число n содержит более двух простых делителей с учетом кратности. Тогда для каждого простого p, делящего n, число n/p — составное (и все эти числа различны). Также n делит само себя, а тогда составных делителей больше, чем простых. Значит, простых множителей не более двух. Легко видеть, что один быть тоже не может, а тогда их два, т. е. $n = pq$, где p, q простые. Но составной делитель тут только один: pq. Значит, $p = q$, то есть $n = p^2$. Очевидно, любые два различных числа такого вида общих делителей (кроме 1) не имеют, то есть ответ — нет.

7. *В углах квадратного двора стоят четыре дома, в которых живут хулиганы, дружащие между собой. Начиная с 1 января 2017 года каждый день навсегда ссорились какие-то два хулигана из соседних домов, а 1 января 2018 года впервые оказалось, что ссориться больше некому. Сколько могло быть всего хулиганов? Приведите все варианты и объясните, почему нет других.*

Решение. Разделим хулиганов на две группировки: в каждую будут объединены хулиганы из противоположных домов. Пусть в одной X хулиганов, а в другой Y. Чтобы все, кто нужно, рассорились, требуется $X \cdot Y$ ссор, и это равно 365. Это число имеет лишь два простых множителя: 5 и 73. Тогда разложений в произведение двух чисел у 365 ровно два:

$$365 = 73 \cdot 5, \quad 365 = 365 \cdot 1,$$

получаем ответ: хулиганов было либо $73 + 5 = 78$, либо $365 + 1 = 366$.

Решения задач 7 класса

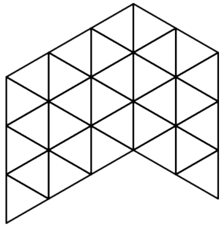
1. *Чебурашка записал словами все чётные трёхзначные числа («сто, сто два, сто четыре, ..., девятьсот девяносто восемь»), а Незнайка — все нечётные трёхзначные числа. Кто из них написал больше слов и на сколько?*

Решение. Посчитаем, насколько различается количество слов в каждом десятке, то есть для набора чисел вида $AB0, \ldots, AB9$, где A и B — какие-то цифры. Каждое число вида $AB0$ на одно слово короче, чем $AB1$, а остальные пары чисел ($AB2$ и $AB3$, $AB4$ и $AB5$ и т. д.) содержат поровну слов. Исключение составляют десятки вида $A10, \ldots, A19$, где все числа содержат поровну слов. Таким образом, в каждой сотне у Незнайки на 9 слов больше, чем у Чебурашки, а суммарно — на 81 слово.
Ответ: Незнайка написал на 81 слово больше.

2. *а) Покажите, как разрезать нарисованную справа фигуру по линиям на две равные (по форме и размеру) части.*
б) Покажите, как это сделать это ещё одним способом.

Решение. См. решение задачи 1 для 6 класса.

3. См. задачу 5 для 5 класса.



4. *Петя придумал два трёхзначных числа УРА и ЮМШ, причём все цифры У, Р, А, Ю, М, Ш различны и не равны нулю. Посчитав произведение УРА · Ю · ММ · ШШШ, он обнаружил, что оно равно квадрату целого числа. Чему может равняться число ЮМШ, если его цифры расположены в порядке возрастания? Найдите все возможные варианты.*

Решение. Заметим, что ММ · ШШШ = $11 \cdot 3 \cdot 37 \cdot$ М · Ш. Тогда

$$\text{УРА} \cdot \text{Ю} \cdot \text{ММ} \cdot \text{ШШШ} = (11 \cdot 3 \cdot 37 \cdot x)^2$$

для какого-то натурального x. Значит,

$$\text{УРА} \cdot \text{Ю} \cdot \text{М} \cdot \text{Ш} = 11 \cdot 3 \cdot 37 \cdot x^2.$$

Поскольку Ю · М · Ш, будучи произведением цифр, не делится ни на 11, ни на 37, то УРА должно делиться на $37 \cdot 11 = 407$, то есть УРА равно 407 или 814. Поскольку нули запрещены, то УРА = 814.

Значит, $2 \cdot$ Ю · М · Ш $= 3 \cdot x^2$. Поэтому в разложении Ю · М · Ш нечётное количество двоек и нечётное количество троек (а других простых множителей чётное количество). Цифры 1, 4, 8 уже использованы, остались 2, 3, 5, 6, 7, 9. Цифры 5 и 7 не подходят, так как привносят в разложение множители 5 (или 7) в первой степени. Из оставшихся цифр, как видно, подходит только набор 2, 3, 9. Поскольку цифры должны быть расположены по возрастанию, то ЮМШ = 239.

5. *На учениях «Путь к миру–2017» по кругу расположены* 2017 *воронок, в одной из которых прячется враг. Артиллерия может залпом обстрелять некоторые (но не все) воронки, после чего враг переползает в следующую по часовой стрелке. При этом ни в какую воронку нельзя стрелять дважды. Какое наименьшее число залпов нужно дать артиллеристам, чтобы гарантированно поразить врага? Не забудьте доказать, что оно наименьшее.*

Решение. Ответ: 3 залпа.

Оценка. Двух залпов мало: после первого залпа найдётся необстрелянная воронка А, после которой (по часовой стрелке) идёт обстрелянная воронка Б. Если враг находился в А, то после первого залпа он перейдёт в Б и не будет убит вторым залпом.

Пример. Пронумеруем воронки по часовой стрелке от 1 до 2017. Можно убить врага, например, такими тремя залпами.

- Залп 1: воронки 2, 4, 6, ..., 2014, 2016. Если враг не убит, то после переползания он может оказаться в воронках 1, 2, 4, 6, 8, ..., 2016.

- Залп 2: воронка 1. Если враг не убит, то после переползания он может оказаться в воронках 3, 5, 7, …, 2017.

- Залп 3: воронки 3, 5, 7, …, 2017. Теперь враг гарантированно убит.

6. *В наборе были гирьки весом в 5, 24 и 67 г, поровну каждого вида. Все имеющиеся гирьки взвесили, и вес оказался равен 363636363636363636 граммам.*
а) Докажите, что более 10 гирек потеряно.
б) Какое минимальное количество гирек могло быть потеряно?

Решение. а) Если ни одна гирька не потеряна, то суммарный вес должен делиться на 24, а он имеет остаток 12 от деления на 24 (т. к. делится на 3 и на 4, но не на 8). Значит, суммарный вес потерянных гирь тоже имеет остаток 12 от деления на 24. Поймём, как получить остаток 12 наименьшим количеством (потерянных) гирь. Можно считать, что не потеряна ни одна 24-граммовая гиря и не потеряна пара гирь $5 + 67$, т. к. ни то, ни другое не меняет остатка от деления на 24. Значит, считаем, что потеряны либо только 5-граммовые гири, либо только 67-граммовые. Любых из них нужно хотя бы 12.

б) Из пункта (а) видно, что для получения нужного остатка от деления на 24 разность количества 5-граммовых и 67-граммовых потерянных гирь должна быть не менее 12. Значит, если потеряна хотя бы одна пара $5 + 67$, то общее количество потерянных гирь не менее 14.

Перейдём к остаткам от деления на 96. Заметим, что общая масса оставшихся гирь имеет остаток 84 при делении на 96. Значит, суммарная масса потерянных гирь имеет остаток 12. Это не достигается ни потерей только 12 5-граммовых гирь (остаток 60), ни потерей только 12 67-граммовых гирь (остаток 36), ни потерей одного из указанных комплектов и одной 24-граммовой (тогда остаток будет 84 или 48). Значит, число потерянных гирь не менее 14.

А вот если потерять 12 гирь в 5 граммов и две гири по 24 грамма, то масса потерянных гирь как раз будет иметь остаток 12 при делении на 96. Заметим, что массу изначального набора можно сделать любым натуральным числом, кратным 96. Поэтому при подходящем изначальном количестве гирь и при потере 14 указанных гирь можно получить указанную массу. Ответ: 14.

7. *Андрей взял огромную круглую салфетку, согнул её пополам (получился полукруг в два слоя), потом ещё раз пополам (получилась четверть круга в четыре слоя), и так далее. После сотого сгиба получился узкий сектор в 2^{100} слоёв. Тогда Андрей развернул круг обратно. Найдите количество пар секторов, которые в развернутом состоянии соседние, а в сложенном между ними ровно 30 слоёв.*

Решение. Каждому сгибу (то есть границе между двумя секторами, которые в развёрнутом виде соседние) можно сопоставить «толщину» — количество слоёв между двумя слоями, которые он разделяет. Заметим, что «толщина» сгиба определяется при его формировании и не меняется в дальнейшем. Кроме того, ясно, что при N-м сгибании формируются сгибы всех чётных толщин от 0 до $2^N - 2$ (каждая по одному разу). Значит, сгиб толщины 30 формируется при каждом сгибании, начиная с 5-го. <u>Ответ: 96.</u>

Решения задач 8 класса

1. См. задачу 4 для 6 класса.

2. *В углах квадратного двора стоят четыре дома, в которых живут 77 хулиганов, дружащих между собой. Начиная с 1 января 2017 года каждый день навсегда ссорились какие-то два хулигана из разных домов, а к 1 января 2018 года оказалось, что друзей из соседних домов не осталось. Докажите, что какая-то из ссор была между хулиганами из противоположных домов.*

Решение. Предположим противное. Далее см. решение задачи 7 для 6 класса.

3. *В наборе были гирьки массой 5, 24 и 43 грамма, поровну каждого вида. Все имеющиеся гирьки взвесили, и их масса оказалась равной $606060\ldots60$ граммам. Докажите, что более 10 гирек потеряно.*

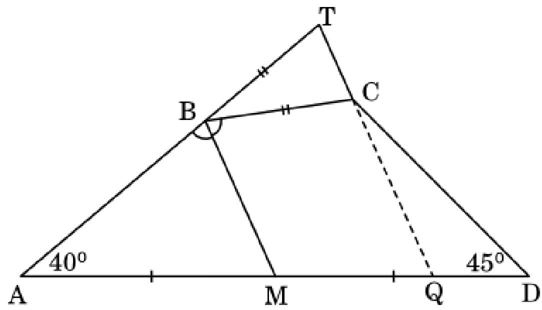
Решение. Если ни одна гирька не потеряна, то суммарный вес должен делиться на 24, а он имеет остаток 12 от деления на 24 (т. к. делится на 3 и на 4, но не на 8). Значит, суммарный вес потерянных гирь тоже имеет остаток 12 от деления на 24. Поймём, как получить остаток 12 наименьшим количеством (потерянных) гирь. Можно считать, что не потеряна ни одна 24-граммовая гиря и не потеряна пара гирь $5 + 43$, т. к. ни то, ни другое не меняет остатка от деления на 24. Значит, считаем, что потеряны либо только 5-граммовые гири, либо только 43-граммовые. Любых из них нужно хотя бы 12.

4. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол A равен $40°$, угол D равен $45°$, биссектриса угла B делит AD пополам. Докажите, что $AB > BC$.*

Решение. Рассмотрим на продолжении стороны AB за точку B такую точку T, что $BT = BC$. Пусть M — середина AD. Тогда $\angle BTC = \angle TCB = \frac{1}{2}\angle ABC$, то есть BM параллельна TC. Обозначим за Q точку пересечения прямых TC и AD; покажем что она лежит на отрезке AD. Это так, поскольку

$$\angle BCD + \angle TCB = (360° - \angle BAC - \angle ABC - \angle ADC) + \angle TCB = \\ = 275° - \frac{1}{2}\angle ABC > 180°.$$

Значит, $AM > MQ$ и $AB > BC$.



5. См. задачу 5 для 7 класса.

6. *В противоположных углах шахматной доски стоят кони. Двое игроков по очереди вырезают из доски свободные клетки. Проигрывает тот, после чьего хода один конь не сможет доскакать по доске до другого. Кто из игроков сможет выиграть, как бы ни ходил другой?*

Решение. Заметим, что в момент перед последним ходом у нас останется только клетки, образующие путь между конями, иначе можно сделать еще больше одного хода. Поскольку при ходе коня клетка под конем меняет цвет, все пути между конями состоят из нечетного количества клеток. Значит, перед последним ходом будет выкинуто тоже нечетное количество клеток, и этот ход достанется второму игроку. То есть выиграет первый игрок.

7. *Найдите все простые p и натуральные n, удовлетворяющие равенству $p^2 + n^2 = 3pn + 1$.*

Решение. Очевидно, $n^2 - 1 = p(3n - p)$, то есть n равно ± 1 по модулю p. Подставим $n = ap \pm 1$ в равенство, после преобразований получим

$$(a^2 + 1 - 3a)p^2 = \pm(3 - 2a)p.$$

Значит, $(3 - 2a) \,\vdots\, p$.

Если $a = 0$, выходит решение $p = 3$, $n = 1$.

Иначе $a \geqslant 3$. С другой стороны, $n \leqslant 3p$, иначе правая часть исходного равенства больше левой. Тогда n может быть равно только $3p - 1$, откуда легко следует $p = 3$, $n = 8$.