



Дорогой друг!

## Юношеская математическая школа при СПбГУ

приглашает Вас принять участие в

### Олимпиаде ЮМШ 2015 года

Начиная с 1997 года, Университет ежегодно проводит для школьников Санкт-Петербурга Олимпиаду ЮМШ, в которой мы предлагаем принять участие учащимся 4–11 классов.

Учащимся 4–8 классов мы предлагаем решить задачи первого (заочного) тура. Для учащихся 9–11 классов первый тур будет проведён 11–12 октября в форме «математического квадрата» на сайте ЮМШ <http://yumsh.spbu.ru>.

Победители и призёры первого тура будут приглашены на второй (очный) тур олимпиады ЮМШ, который состоится в ноябре — декабре. Точное время и место проведения второго тура будут указаны на сайте ЮМШ.

Мы будем рады, если в олимпиаде примут участие Ваши друзья, которым нравится математика. Однако работы с признаками списывания и «коллективного творчества» рассматриваться не будут. Среди задач есть весьма трудные, так что присылайте свою работу, даже если Вам удалось решить лишь две-три задачи. Помните, что решение задачи должно включать не только правильный ответ, но и полное обоснование этого ответа.

Просим Вас оформить свою работу в обыкновенной школьной тетради в клетку. На титульном листе обязательно укажите (так, чтобы это было хорошо заметно) номер класса, в котором учитесь. На первой (белой) странице тетради напишите печатными буквами: фамилию и имя, полный домашний адрес с индексом и телефон, класс, номер и район Вашей школы. Если у Вас есть электронный адрес, укажите его (разборчиво!). Если Вы занимаетесь в математическом кружке, то укажите фамилию руководителя и место занятий кружка. Условия задач переписывать не нужно. Решение каждой задачи начинайте с новой страницы.

Заочный тур для 4–8 классов проводится с **11 сентября по 10 октября** 2015 года.

Решения заочного тура можно сдать несколькими способами:

- с 1 по 10 октября с 16:00 до 20:00 по рабочим дням сдать тетрадь с решениями по адресу:  
СПб, 14 линия Васильевского острова, д 29 (можно привезти сразу несколько работ или работы всей школы организованно);
- отправить до 10 октября свою работу по почте (указав номер Вашего класса на конверте):  
198504, Старый Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ, ЮМШ;
- до 10 октября прислать работу через веб-форму на сайте ЮМШ: <http://yumsh.spbu.ru>

Результаты проверки работы будут сообщены в школу в середине ноября. В это же время они станут доступны на сайте ЮМШ.

Вопросы по условиям задач можно задавать с помощью веб-формы на сайте ЮМШ, а также по телефону (+7 812) 573-97-32.

*Желаем успеха!*

### ***Дорогие ученики четвёртых, пятых и шестых классов!***

Приглашаем вас и ваших родителей на «Математический праздник» — встречу, посвящённую открытию математических кружков. Вас ждут увлекательные математические соревнования, а ваших родителей — полезная информация о возможностях дополнительного математического образования в Санкт-Петербурге.

Школьники, занимающиеся в кружках ЮМШ, ежегодно показывают высокие результаты на различных олимпиадах и исследовательских конференциях учащихся. Помимо занятий в городе, дети каждое лето с удовольствием ездят в летний лагерь ЮМШ. Большинство выпускников в дальнейшем успешно продолжают обучение на различных факультетах СПбГУ и других ВУЗов.

Ждём Вас и Ваших родителей **20 сентября в 11:00** по адресу:  
**ул. Таллинская, д. 26 корп. 2, м. Новочеркасская.**



XIX олимпиада Юношеской математической школы  
Заочный тур (11 сентября – 10 октября 2015)

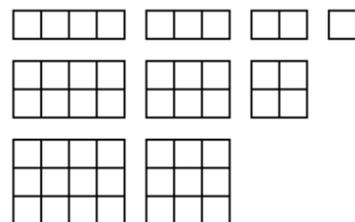
**Задания для 4 и 5 классов**

*Не забывайте обосновывать свои решения!*

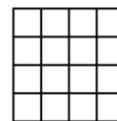
1. У Гоши в саду распустились ровно 100 цветов: красные и жёлтые розы, жёлтые подсолнухи, красные и белые хризантемы. Гордый Гоша пересчитал свои цветы и обнаружил, что более 30 из них белого цвета, более 50 — розы, более 25 — подсолнухи и более 15 — хризантемы. Не ошибся ли он?

2. Марина записала дату своего рождения (число, месяц и год). Потом она умножила число на номер месяца и получила 372. Когда у неё день рождения? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

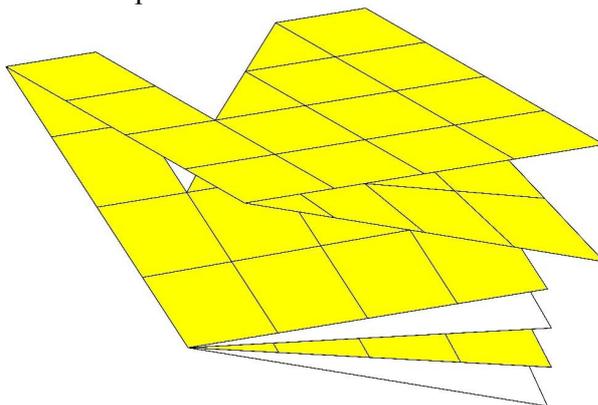
3. В галактике Кин-Дза-Дза живут пацаки и чатлане. У них принято говорить правду, если в помещении присутствуют представители обеих рас, и врать среди своих. Собрались в комнате трое жителей галактики. Первый сказал: «Я пацак», и вышел из помещения. Второй сказал: «А я чатланин». Определите, кем является каждый из них. Не забудьте объяснить, почему другие варианты невозможны.



4. Коле и Толе подарили на день рождения по набору из десяти прямоугольников (см. рисунок). Коля потерял один из них, а из остальных девяти сумел составить квадрат. Толя потерял другой прямоугольник, но из остальных девяти тоже сумел составить квадрат. Нарисуйте, как могли выглядеть квадраты, составленные Колей и Толей. Достаточно привести по одному примеру.



5. Прямоугольный лист цветной клетчатой бумаги сложили и вырезали из него часть так, как показано на рисунке. Затем этот лист развернули. Нарисуйте развернутый лист и покажите на рисунке сделанные вырезы.



6. На доске написано число 12345. Разрешается прибавить к имеющемуся числу любую его ненулевую цифру. Андрюша утверждает, что сможет десять тысяч раз проделать такую операцию, и после каждого применения этой операции результат будет нечётным. Прав ли он?

7. Имеется 31 гиря: 16 гирь весом в 1 пуд, 8 гирь по 2 пуда, 4 гири по 4 пуда, две 8-пудовых и одна 16-пудовая. Все гири выглядят одинаково, но для подъёма гири нужны хотя бы столько человек, сколько пудов она весит. При этом на каждую попытку подъёма гири (удачную или неудачную) тратится одна минута. Бригада из 16 рабочих должна поднять каждую из этих гирь.

а) Объясните, как бригаде справиться с заданием за 9 минут.

б) Сумеет ли бригада справиться за 9 минут, если один из рабочих — новичок, и его можно привлекать не более чем два раза?

*Даже если вы решили только один из пунктов (а) и (б), есть смысл записать его решение.*

**Оформление работы.** На первой (белой) странице тетради напишите печатными буквами: фамилию и имя, полный домашний адрес с индексом и телефон, класс, номер и район школы, в которой Вы учитесь. Если у Вас есть электронный адрес, укажите его (разборчиво!). Если Вы занимаетесь в математическом кружке, то укажите фамилию руководителя и место занятий кружка.

Условия задач переписывать не нужно. Решение каждой задачи начинайте с новой страницы. Помните, что решение задачи должно включать не только правильный ответ, но и полное обоснование этого ответа.

**Как сдать решения олимпиады:**

а) с 1 по 10 октября с 16:00 до 20:00 по рабочим дням сдать тетрадь с решениями по адресу: Санкт-Петербург, 14 линия Васильевского острова, д 29 (можно привезти сразу несколько работ или даже работы всей школы);

б) отправить до 10 октября свою работу по почте (указав номер Вашего класса на конверте):

198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ, ЮМШ;

в) до 10 октября прислать работу через веб-форму на сайте ЮМШ: <http://yumsh.spbu.ru>

Результаты проверки работы будут сообщены в школу в середине ноября. Тогда же они будут доступны на сайте ЮМШ.

Вопросы по условиям задач можно задавать с помощью веб-формы на сайте ЮМШ, а также по тел. (+7 812) 573-97-32.



ХІХ олимпиада Юношеской математической школы  
Заочный тур (11 сентября – 10 октября 2015)

**Задания для 6 класса**

*Не забывайте обосновывать свои решения!*

1. В галактике Кин-Дза-Дза живут пацаки и чатлане. У них принято говорить правду, если в помещении присутствуют представители обеих рас, и врать среди своих. Собрались в комнате трое жителей галактики. Первый сказал: «Я пацак», и вышел из помещения. Второй сказал: «А я чатланин». Определите, кем является каждый из них. Не забудьте объяснить, почему другие варианты невозможны.
2. Можно ли составить из цифр от 1 до 9 (использовав каждую по одному разу) четыре числа, одно из которых делится на 36, другое на 37, третье на 38, а четвертое на 39?
3. В городе Шестиплощадный, как это следует из его названия, ровно шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями, причем из трёх этих улиц одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Никакие две улицы не пересекаются (хотя и могут выходить на одну и ту же площадь). Как может выглядеть возможный план такого города?
4. Число заменяют на произведение цифр, результат — опять на произведение его цифр, и так далее. Докажите, что среди четырёхзначных чисел не менее трети при помощи таких операций рано или поздно превращаются в ноль.
5. Найдите все такие четырёхзначные числа  $\overline{ABCD}$ , что  $\overline{ABCD} = 78 \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD})$ . Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы **тоже могут** обозначать одинаковые цифры. Горизонтальная черта над буквами означает, что речь идёт о числе, составленном из этих цифр в указанном порядке (например,  $\overline{ABC}$  — трёхзначное число из цифр А, В и С).
6. Известно, что у чисел  $n-1$  и  $n+1$  всего по два делителя, а у числа  $n$  — ровно четыре делителя. Чему может быть равно  $n$ ?
7. За круглым столом сидят чукчи и алеуты, всего 298 человек. Известно, что троек подряд сидящих людей, в которых больше чукч, столько же, сколько и троек подряд сидящих, в которых больше алеутов. Какое наименьшее количество алеутов может находиться за столом?
8. На столе лежит куча из 1024 камней. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За один ход разрешается разбить любую из лежащих на столе куч на несколько одинаковых куч. Проигрывает тот игрок, после хода которого на столе окажутся 1024 кучи по 1 камню. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

Оформление работы. На первой (белой) странице тетради напишите печатными буквами: фамилию и имя, полный домашний адрес с индексом и телефон, класс, номер и район школы, в которой Вы учитесь. Если у Вас есть электронный адрес, укажите его (разборчиво!). Если Вы занимаетесь в математическом кружке, то укажите фамилию руководителя и место занятий кружка.

Условия задач переписывать не нужно. Решение каждой задачи начинайте с новой страницы. Помните, что решение задачи должно включать не только правильный ответ, но и полное обоснование этого ответа.

Как сдать решения олимпиады:

- а) с 1 по 10 октября с 16:00 до 20:00 по рабочим дням сдать тетрадь с решениями по адресу: Санкт-Петербург, 14 линия Васильевского острова, д 29 (можно привезти сразу несколько работ или даже работы всей школы);
- б) отправить до 10 октября свою работу по почте (указав номер Вашего класса на конверте):  
198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ, ЮМШ;
- в) до 10 октября прислать работу через веб-форму на сайте ЮМШ: <http://yumsh.spbu.ru>

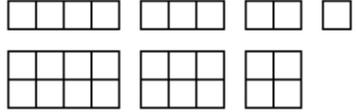
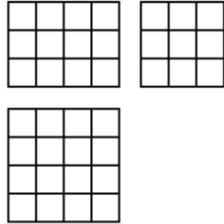
Результаты проверки работы будут сообщены в школу в середине ноября. Тогда же они будут доступны на сайте ЮМШ. Вопросы по условиям задач можно задавать с помощью веб-формы на сайте ЮМШ, а также по тел. (+7 812) 573-97-32.



XIX олимпиада Юношеской математической школы  
Заочный тур (11 сентября – 10 октября 2015)

**Задания для 7 класса**

*Не забывайте обосновывать свои решения!*

1. Можно ли составить из цифр от 1 до 9 (использовав каждую по одному разу) четыре числа, одно из которых делится на 16, другое на 17, третье — на 18, а четвёртое — на 19?
2. Коле на день рождения подарили набор из 10 прямоугольников (см. рисунок). Один из них он потерял, а из остальных собрал квадрат. Какой из прямоугольников мог потерять Коля? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.  

3. Влад пронумеровал клетки шахматной доски (от 1 до 64) в каком-то порядке. Гоша сделал то же самое со своей шахматной доской, но нумерация получилась другой. Может ли оказаться, что клетки доски Влада соединены ходом коня тогда и только тогда, когда клетки доски Гоши с теми же номерами соединены ходом короля?  

4. На доске были написаны 10 последовательных четырёхзначных чисел. Затем их стёрли, заменив каждое из них на его наименьший простой делитель. Докажите, что теперь на доске есть число, большее 10.
5. Число 2015 разбили на 12 слагаемых, после чего выписали все числа, которые можно получить, сложив некоторые из этих слагаемых (от одного до девяти). Какое минимальное количество чисел могло быть выписано?
6. Даны 2 кучки по 50 камней. Играют трое: первый игрок может за свой ход взять 1 камень из одной кучки и 5 из другой, второй игрок — 2 и 6, третий — 3 и 7. Игроки делают ходы по очереди именно в указанном порядке (первый, потом второй, потом третий). Игра заканчивается, когда кто-то не сможет сделать ход. Может ли оказаться так, что последним ходил первый игрок?
7. В стране есть дороги с односторонним движением. Король каждый день совершает прогулку по одной из дорог, не глядя на правила движения и не гуляя по одной дороге два дня подряд. Герцог же в чётный день месяца проезжает по дороге по правилам, а по нечётным — с нарушением правил (проезжать туда-обратно в течение двух дней он, в отличие от короля, может). Известно, что Герцог может путешествовать сколь угодно долго. Докажите, что король — тоже (правильно выбрав начальный город).

Оформление работы. На первой (белой) странице тетради напишите печатными буквами: фамилию и имя, полный домашний адрес с индексом и телефон, класс, номер и район школы, в которой Вы учитесь. Если у Вас есть электронный адрес, укажите его (разборчиво!). Если Вы занимаетесь в математическом кружке, то укажите фамилию руководителя и место занятий кружка.

Условия задач переписывать не нужно. Решение каждой задачи начинайте с новой страницы. Помните, что решение задачи должно включать не только правильный ответ, но и полное обоснование этого ответа.

Как сдать решения олимпиады:

- а) с 1 по 10 октября с 16:00 до 20:00 по рабочим дням сдать тетрадь с решениями по адресу: Санкт-Петербург, 14 линия Васильевского острова, д 29 (можно привезти сразу несколько работ или даже работы всей школы);
- б) отправить до 10 октября свою работу по почте (указав номер Вашего класса на конверте): 198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ, ЮМШ;
- в) до 10 октября прислать работу через веб-форму на сайте ЮМШ: <http://yumsh.spbu.ru>

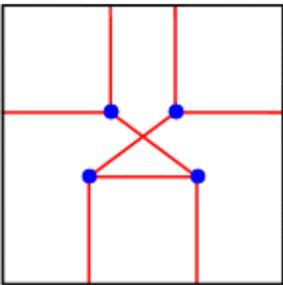
Результаты проверки работы будут сообщены в школу в середине ноября. Тогда же они будут доступны на сайте ЮМШ. Вопросы по условиям задач можно задавать с помощью веб-формы на сайте ЮМШ, а также по тел. (+7 812) 573-97-32.



ХІХ олимпиада Юношеской математической школы  
Заочный тур (10 сентября – 10 октября 2015)

## Задания для 8 класса

*Не забывайте обосновывать свои решения!*

1. В одном городе много домов, в каждом доме поровну квартир, в каждой квартире поровну аквариумов, в каждом аквариуме поровну рыбок, у каждой рыбки поровну чешуек. Рыбок в каждом доме больше, чем чешуек в каждой квартире. А чего больше: квартир в городе или чешуек у одной рыбки? Ответ обоснуйте.
2. Влад пронумеровал клетки шахматной доски (от 1 до 64) в каком-то порядке. Гоша сделал то же самое со своей шахматной доской, но нумерация получилась другой. Может ли оказаться, что клетки доски Влада соединены ходом коня тогда и только тогда, когда клетки доски Гоши с теми же номерами соединены ходом короля?
3. Екатерина назвала Андрею некоторое целое число. Докажите, что Андрей сможет выписать на доске 10 последовательных целых чисел, а затем стереть одно из них, так что сумма девяти оставшихся будет равняться числу Екатерины.
4. Внутри квадрата отмечены четыре точки и проведены девять отрезков (см. рисунок). Длины всех отрезков равны 1. Отрезки, проведённые от точек к сторонам квадрата, перпендикулярны им. Найдите длину стороны квадрата.
5. Известно, что делители всякого «неквadratного» числа можно разбить на пары так, чтобы произведения делителей в каждой паре были равными. Например,  $18=1\cdot 18=2\cdot 9=3\cdot 6$ . А существуют ли «неквadratные» числа, все делители которых можно разбить на тройки так, чтобы произведения делителей в каждой тройке были равными?
6. Сумма четырёх вещественных чисел равна 10, а сумма их квадратов — 30. Докажите, что некоторые два из них отличаются не более, чем на 1.
7. В охранном предприятии «ООО» работает 2015 сотрудников. Из них образовано несколько групп быстрого реагирования (по несколько человек в каждой), причём любые две группы имеют хотя бы одного общего сотрудника. Докажите, что всех сотрудников предприятия «ООО» можно расположить вокруг Очень Охраняемого Объекта по окружности длины 1 км таким образом, чтобы любая группа быстрого реагирования была растянута вдоль этой окружности не менее чем на  $1/3$  км (то есть чтобы никакую группу быстрого реагирования нельзя было целиком покрыть дугой длины меньше  $1/3$  км).

Оформление работы. На первой (белой) странице тетради напишите печатными буквами: фамилию и имя, полный домашний адрес с индексом и телефон, класс, номер и район школы, в которой Вы учитесь. Если у Вас есть электронный адрес, укажите его (разборчиво!). Если Вы занимаетесь в математическом кружке, то укажите фамилию руководителя и место занятий кружка.

Условия задач переписывать не нужно. Решение каждой задачи начинайте с новой страницы. Помните, что решение задачи должно включать не только правильный ответ, но и полное обоснование этого ответа.

Как сдать решения олимпиады:

- а) с 1 по 10 октября с 16:00 до 20:00 по рабочим дням сдать тетрадь с решениями по адресу: Санкт-Петербург, 14 линия Васильевского острова, д 29 (можно привезти сразу несколько работ или даже работы всей школы);
- б) отправить до 10 октября свою работу по почте (указав номер Вашего класса на конверте):  
198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ, ЮМШ;
- в) до 10 октября прислать работу через веб-форму на сайте ЮМШ: <http://yumsh.spbu.ru>

Результаты проверки работы будут сообщены в школу в середине ноября. Тогда же они будут доступны на сайте ЮМШ.

Вопросы по условиям задач можно задавать с помощью веб-формы на сайте ЮМШ, а также по тел. (+7 812) 573-97-32.